

CÁLCULO DE CANTIDADES GEOMÉTRICAS MEDIANTE EL CÁLCULO INTEGRAL

En este documento vamos a ver cómo calcular algunas cantidades geométricas, relacionadas con objetos de una, dos y tres dimensiones. Específicamente veremos cómo calcular la longitud de un arco de una curva, el área de una superficie plana y el volumen de un sólido de revolución, recurriendo, en cualquier caso, al proceso de integración, antes descrito, en el que se considera la variación de una sola variable

1. OBJETOS DE UNA DIMENSIÓN

Longitud de un segmento rectilíneo. Antes de ver cómo calcular la longitud de un arco curvilíneo, veremos cómo utilizar el proceso de integración para calcular la longitud de un segmento rectilíneo, en cuyo caso conocemos de antemano el resultado.

Así pues, supongamos primeramente que queremos calcular la longitud de un pedazo de alambre rectilíneo, comprendido entre los puntos $A = (a, 0)$ y $B = (b, 0)$, con el sistema coordenado graduado en centímetros (figura 1).

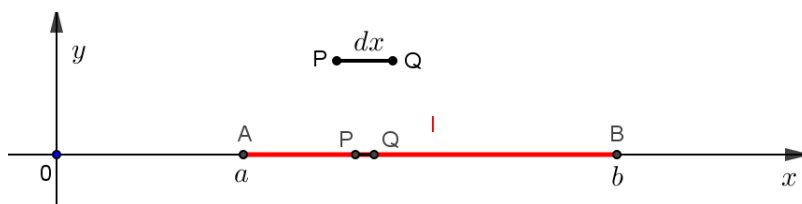


Figura 1

Denotando por l a la longitud buscada y eligiendo, como elemento de longitud, al segmento PQ, de longitud dx donde $P = (x, 0)$ y $x \in [a, b]$, tenemos que $dl = PQ = dx$ y, por lo tanto: $l = \int_a^b dl = \int_a^b dx = x|_{x=a}^{x=b} = b - a$ cm, tal como debía ocurrir.

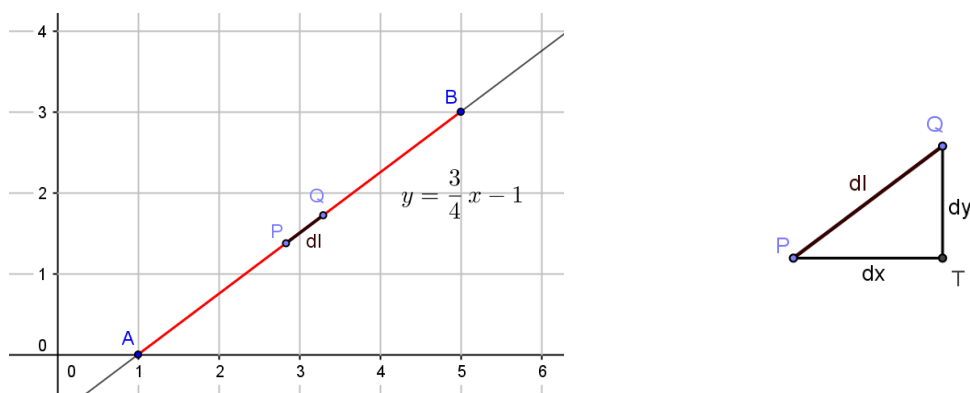


Figura 2

Ahora vamos a calcular la longitud de un segmento de una recta inclinada. Para ello consideraremos la recta $3x - 4y = 3$, o bien $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$, así como a los puntos $A = (1,0)$ y $B = (5,3)$, con el sistema coordenado graduado en centímetros (figura 2, izquierda).

Ahora elegimos, como elemento de longitud, a $dl = PQ$, donde $P = (x, y)$, $x \in [1, 5]$ y Q es un punto de la recta, infinitamente próximo a P , de manera que $Q = (x + dx, y + dy)$, como se indica en la figura (derecha).

Tenemos entonces que $dl = PQ = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, pero $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$, de manera que $dy = \frac{3}{4}dx$, y $dl = \sqrt{dx^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 dx^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{16}} dx = \sqrt{\frac{16+9}{16}} dx = \frac{5}{4}dx$.

Así pues $l = \int_{AB} dl = \int_1^5 \frac{5}{4} dx = \frac{5}{4}x \Big|_{x=1}^{x=5} = \frac{5}{4}(5 - 1) = 5$ cm, como debía ocurrir, de acuerdo con el teorema de Pitágoras.

Longitud de arco. Coordenadas rectangulares. Veamos ahora cómo calcular la longitud de un arco curvilíneo, suponiendo que se conoce alguna representación algebraica de la misma, suponiendo, para empezar, que se utiliza un sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas, de manera que cada curva en el plano estará dada mediante una ecuación de la forma $R(x, y) = 0$ (figura 3). Se desea conocer la longitud del arco de esta curva, comprendido entre los puntos A, de abscisa a y B, de abscisa b .

Así pues, al considerar un punto P desplazándose sobre la curva, se determinarán las variables x , y y $s(x, y)$, siendo (x, y) las coordenadas del punto y $s(x, y)$ la longitud del arco de la curva medido desde el punto A hasta el punto P. Si ahora se supone un desplazamiento infinitesimal del punto, a partir de P, se definirán los incrementos infinitesimales, es decir, las diferenciales dx , dy y ds , de esas variables, las que formarán un triángulo equilátero, como se muestra en la figura 3 (derecha).

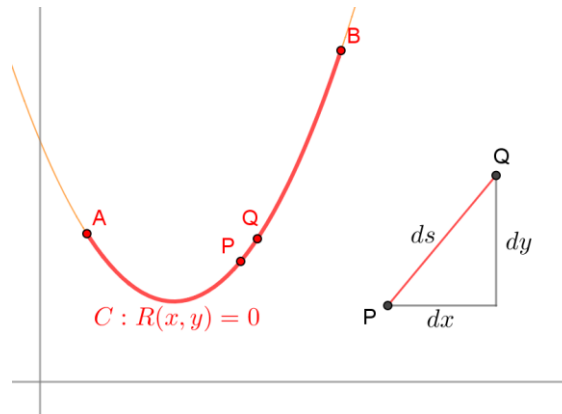


Figura 3

De esta manera, de acuerdo con el teorema de Pitágoras, tendremos que:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (1)$$

Por lo tanto, el *elemento de arco* estará dado, en coordenadas rectangulares, por:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (2)$$

Por ejemplo, consideremos una curva cuya longitud conocemos: la circunferencia. Así pues, siendo C la circunferencia con centro en el origen y radio a , su ecuación será $x^2 + y^2 = a^2$ y la de la semicircunferencia “superior” $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (figura 4).

Considerando un punto moviéndose sobre esta semicircunferencia en el sentido creciente del eje x , es decir, de izquierda a derecha, tendremos que la variable x recorre el intervalo $[-a, a]$ y que, a cada incremento infinitesimal de la misma, le corresponde un diferencial de y , dado por:

$$dy = d(\sqrt{a^2 - x^2}) = \frac{-2x dx}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Así que $dy^2 = \left(-\frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)^2 = \frac{x^2 dx^2}{a^2 - x^2}$ y al sustituir en (2) se tiene que:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{x^2 dx^2}{a^2 - x^2} = \frac{dx^2(a^2 - x^2) + x^2 dx^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^2} dx^2$$

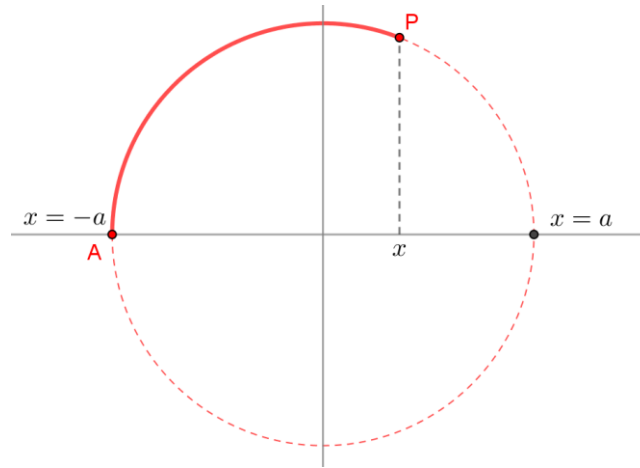


Figura 4

De manera que $ds = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$ y $s(x) = \int \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a \arcsen \frac{x}{a} + c$. Pero $s(-a) = 0 = \arcsen(-1) + c = a\left(-\frac{\pi}{2}\right) + c$, así que $c = \frac{\pi a}{2}$ y $s(x) = a \arcsen \frac{x}{a} + \frac{\pi a}{2}$.

En particular, para $x = a$ (media circunferencia), tenemos que $s(a) = a \arcsen \frac{a}{a} + \frac{\pi a}{2} = a \arcsen 1 + \frac{\pi a}{2} = \frac{\pi a}{2} + \frac{\pi a}{2} = \pi a$. Por lo tanto, la longitud de la circunferencia completa es $2\pi a$, que es el resultado conocido.

Ahora bien, si la curva está definida por medio de $y = f(x)$, entonces $dy = f'(x)dx$, y al sustituir en (2) se obtiene $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + (f'(x))^2 dx^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$, por lo que:

La longitud del arco de la curva definida por medio de $y = f(x)$, comprendido entre los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$, está dada por:	
---	--

$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$	(3)
--	-----

Veamos el siguiente ejemplo. Se trata de la longitud de la curva definida por $f(x) = \cosh x$. Así pues, tenemos que $f'(x) = \sinh x$, así que $\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + (\sinh x)^2} = \sqrt{1 + \sinh^2 x} = \sqrt{(\cosh x)^2} = \cosh x$.

Supongamos ahora que queremos calcular la longitud de un arco cuyo punto inicial es el vértice V de la curva (figura 5), cuya abscisa es $x = 0$. Si el punto final es $B = (t, \cosh t)$, entonces la longitud será:

$$l = \int_0^t \cosh x \, dx = \sinh x \Big|_0^t = \sinh t - \sinh 0 = \sinh t$$

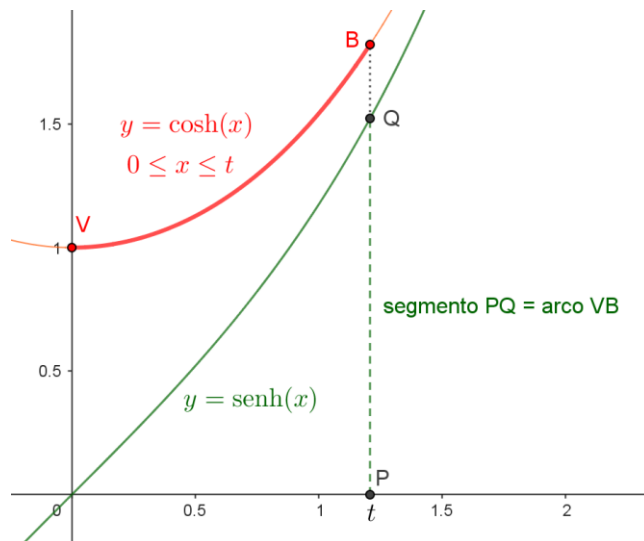


Figura 5

En la gráfica se muestran las gráficas de $y = \cosh x$ y de $y = \sinh x$. El resultado obtenido nos dice que la longitud del arco VB de la gráfica de $f(x) = \cosh x$ es igual a la longitud del segmento PQ cuyo valor es $\sinh t$.

El valor de t , en la gráfica, es 1.2. El valor del arco de f , entre $x = 0$ y $x = t = 1.2$ es entonces $\sinh 1.2 \cong 1.5095$.

Longitud de arco. Coordenadas polares. Un elemento de arco de una curva, en un sistema de coordenadas polares, estará dado por una variación infinitesimal de cada una de las variables coordenadas r y θ (figura 6). Así pues, cuando un punto recorre un arco infinitesimal sobre la curva, desde P hasta Q, habrá tenido lugar un cambio infinitesimal dr y otro $d\theta$. La longitud de este elemento de arco es la de la hipotenusa del triángulo PTQ, es decir $ds = \sqrt{PT^2 + TQ^2}$.

Pero PT es el arco de la circunferencia de radio r , correspondiente a un ángulo central $d\theta$, así que $PT = r \, d\theta$, mientras que $TQ = dr$, así que $ds = \sqrt{r^2 d\theta^2 + dr^2}$.

Ahora bien, normalmente la curva viene dada por una expresión de la forma $r(\theta)$, así que $dr = r' d\theta$, $dr^2 = (r' d\theta)^2 = r'^2 d\theta^2$, y $r^2 d\theta^2 + dr^2 = r^2 d\theta^2 + r'^2 d\theta^2 = (r^2 + r'^2) d\theta^2$. Por lo tanto:

$ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$	(4)
----------------------------------	-----

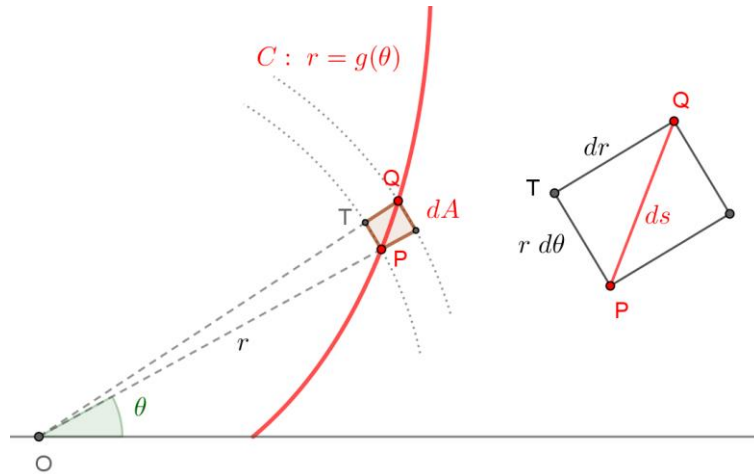


Figura 6

Por ejemplo, si $r = a(1 + \cos \theta)$ (cardioide), tenemos que:

$$\begin{aligned} r &= a + a \cos \theta, & r^2 &= (a + a \cos \theta)^2 = a^2 + 2a^2 \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta, \\ r' &= -a \sin \theta, & r'^2 &= a^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Así que:

$$\begin{aligned} r^2 + r'^2 &= a^2 + 2a^2 \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta = \\ &= a^2(1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = a^2(1 + 2 \cos \theta + 1) = \\ &= a^2(2 + 2 \cos \theta) = 2a^2(1 + \cos \theta) = 2a^2 \left(2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) = 4a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

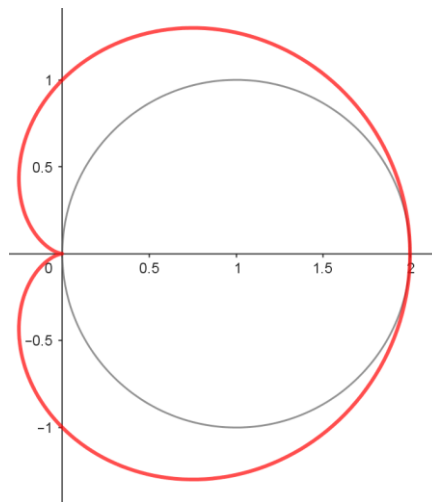


Figura 7

Por lo tanto:

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = \sqrt{4a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta$$

Considerando sólo la mitad (superior) de la curva, para la cual $\theta \in [0, \pi]$ y observando que $s(0) = 0$, tenemos que $s(\pi) = \int_0^\pi 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 4a \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^\pi = 4a \sin \frac{\pi}{2} = 4a$. Por lo tanto, la longitud total de la cardioide es $8a$ unidades de longitud.

En la figura 7 se muestra la curva (con $a = 1$), lo mismo que la circunferencia de radio 1 y centro en $(1,0)$. La longitud de la circunferencia es $2\pi \cong 6.2832$ unidades de longitud, así que la longitud de la cardioide es $\frac{8}{6.2832} \cong 1.27$ veces la de la circunferencia.

2. OBJETOS DE DOS DIMENSIONES

Área de una región plana

El plano, o una parte de este, es un objeto geométrico de dos dimensiones, de manera que, para describir una región del plano, se requiere determinar el recorrido de dos variables coordenadas. Sin embargo, para determinadas situaciones, es posible describirla si se define el recorrido de una sola variable. En tales casos podemos calcular el área de la región por medio de una integral simple, como las que hemos estado utilizando.

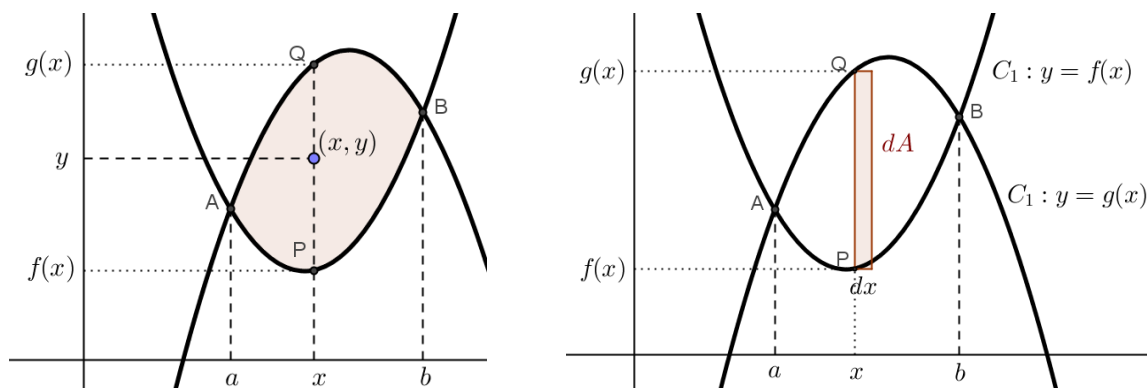


Figura 8

Coordenadas rectangulares. En coordenadas rectangulares consideraremos dos tipos básicos de regiones en el plano, el primero corresponde a una región comprendida entre dos rectas paralelas al eje y y dos relaciones funcionales con x como variable independiente (figura 8), es decir, una región que puede describirse mediante:

$$R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\} \quad (5)$$

En este caso, para cada $x \in [a, b]$ proponemos como elemento de área al rectángulo sombreado en la figura 8 (derecha), de manera que $dA = [g(x) - f(x)]dx$, y:

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx \quad (6)$$

Por ejemplo, consideremos la región comprendida entre las gráficas de $y = x^3$ y $y^2 = x$ (ver figura 9).

Aunque en este caso es un tanto obvio, para determinar la región mediante desigualdades, debemos primeramente determinar las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas, para lo cual habremos de resolver el sistema de ecuaciones $\{y = x^3, y^2 = x\}$.

Así pues, si sustituimos lo indicado por la primera ecuación en la segunda, obtenemos:

$$(x^3)^2 = x, \quad x^6 = x, \quad x^6 - x = 0, \quad x(x^5 - 1) = 0,$$

$$x(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

De donde resulta que las dos raíces reales, que corresponden a las abscisas de los puntos de intersección, son $x = 0$ y $x = 1$.

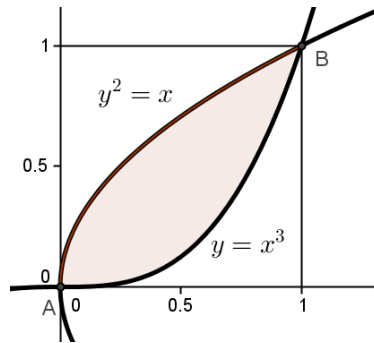


Figura 9

Además, la figura 9 sugiere que no hay más raíces reales, como puede verificarse recurriendo a la teoría de ecuaciones polinomiales. Así pues, la región de interés puede describirse mediante $R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq x^{1/2}\}$, de manera que, suponiendo que el sistema coordenado está graduado en centímetros:

$$A(R) = \int_0^1 [x^{1/2} - x^3] dx = \left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{4} x^4 \right)_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \text{ cm}^2$$

El segundo tipo básico de región se tiene cuando la región está comprendida entre dos rectas paralelas al eje x y dos relaciones funcionales, con y como variable independiente (ver figura 10), de manera que podrá describirse mediante:

$$R = \{(x, y) | c \leq y \leq d, \phi(y) \leq x \leq \psi(y)\} \quad (7)$$

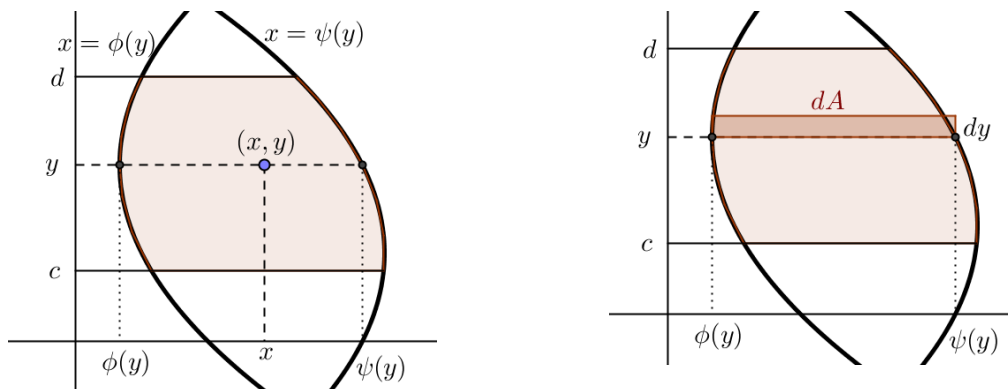


Figura 10

En este caso conviene proponer el elemento de área mediante $dA = [\gamma(y) - \phi(y)]dy$, de manera que:

$$A = \int_c^d [\gamma(y) - \phi(y)]dy \quad (8)$$

Así, para la región del ejemplo anterior, tenemos que:

$$R = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq y^{1/3}\}$$

Por lo tanto:

$$A(R) = \int_0^1 [y^{1/3} - y^2]dy = \left(\frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{1}{3}x^3\right)_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12} \text{ cm}^2$$

En los casos de interés para las ciencias de la ingeniería, una región plana que no pueda identificarse como una de alguno de los dos tipos mencionados podrá verse como la unión de dos o más regiones, cada una de las cuales sea de alguno de estos dos tipos, de manera que su área podrá calcularse como la suma de las áreas de cada una de esas partes.

Coordenadas polares. En coordenadas polares consideraremos sólo un tipo básico de región en el plano, y ocurre si dicha región está comprendida entre los rayos $\theta = a$ y $\theta = b$ (con a y b en radianes), y las gráficas de dos relaciones funcionales de la forma $r = g(\theta)$ (ver figura 11), de manera que puede describirse mediante:

$$R = \{(\theta, r) | a \leq \theta \leq b, g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)\} \quad (9)$$

Así pues, podemos proponer como elemento de área a la del sector VWSU, cuyo valor es $dA = \frac{1}{2}([g_2(\theta)]^2 - [g_1(\theta)]^2)d\theta$, así que:

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b ([g_2(\theta)]^2 - [g_1(\theta)]^2) d\theta \quad (10)$$

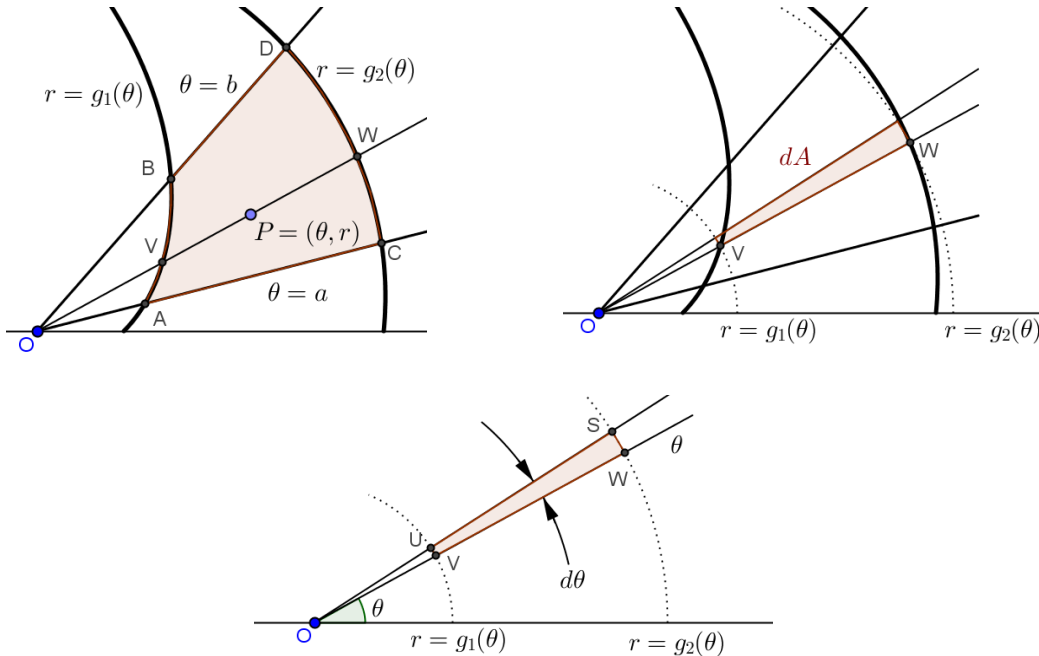


Figura 11

Por ejemplo, si deseamos calcular el área interior a la cardioide $A = 1 + \cos \theta$, aprovechando la simetría (figura 12, izquierda), tendremos que calcular el área de la mitad situada por encima del eje x (desde E hasta O), que puede describirse mediante:

$$R = \{(\theta, r) | 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 1 + \cos \theta\}$$

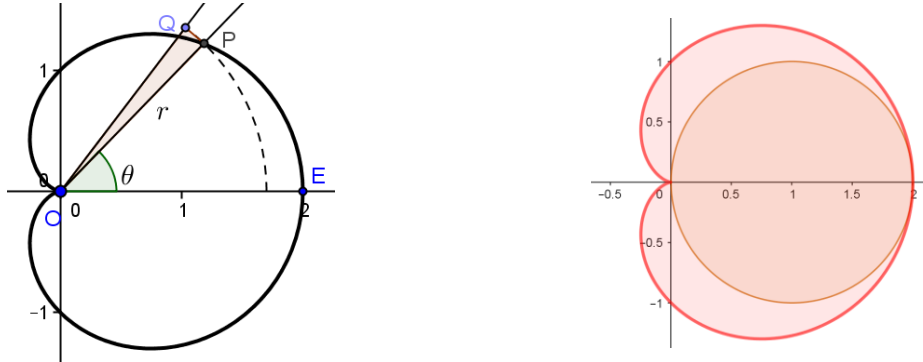


Figura 12

Por lo tanto, de acuerdo con (9) y (10), y suponiendo que el sistema coordenado está graduado en centímetros, tenemos que el área buscada es:

$$A = (2) \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \int_0^\pi (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta$$

$$A = \int_0^\pi \left(1 + 2 \cos \theta + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta\right) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi (3 + 4 \cos \theta + \cos 2\theta) d\theta$$

$$A = \frac{1}{2} \left[3\theta + 4 \sin \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^\pi = \frac{3\pi}{2} \text{ cm}^2 \cong 4.71 \text{ cm}^2$$

Comparando nuevamente con el área interior a la circunferencia unitaria (figura 12, derecha), observamos que el área de la cardioide es $\frac{3\pi/2}{\pi} = \frac{3}{2}$ veces la del círculo.

3. VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN.

Se mencionó antes que el plano o una parte de este, es un objeto de dos dimensiones. Sin embargo, para los casos anteriormente considerados, pudimos describir una región plana por medio de la variación de una sola variable. Pues bien, lo mismo podremos hacer, para un caso particular, y calcular el volumen de un sólido, a pesar de que un sólido es un objeto de tres dimensiones. El caso particular es el de un sólido generado por la rotación de una curva plana alrededor de una recta situada en dicho plano.

Método de los discos. Supóngase que se genera un sólido mediante la rotación de un arco curvilíneo plano, alrededor de una recta contenida en el mismo plano, por ejemplo, por la rotación de la porción de la gráfica de la función definida por $y = f(x)$, comprendida entre los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$ (figura 13), alrededor del eje x .

Para calcular el volumen del sólido así generado podemos elegir, como contribución elemental, al volumen del disco cilíndrico con radio $y = f(x)$, para cada x en el intervalo $[a, b]$ y espesor infinitesimal dx , de manera que el valor de esa contribución elemental será $dV = \pi y^2 dx$, y el volumen del sólido será:

$$V = \int dV = \int_a^b \pi y^2 dx \quad (11)$$

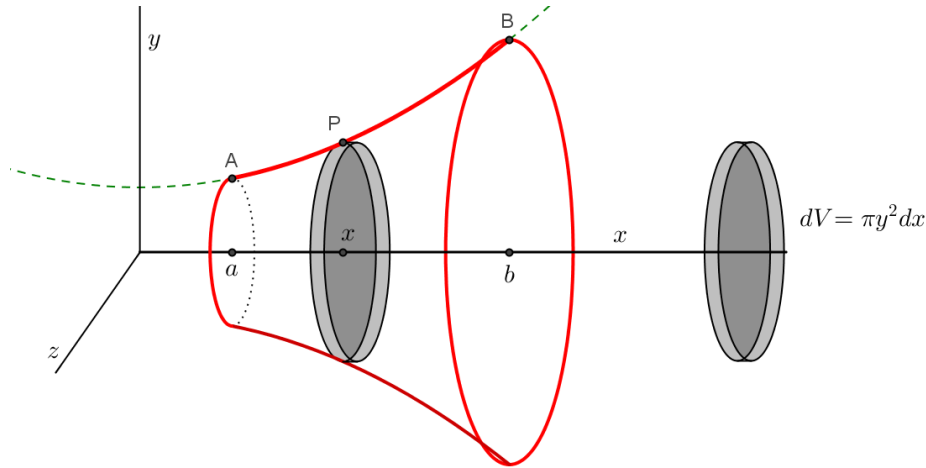


Fig. 13

Por ejemplo (figura 14), consideremos el sólido de revolución que se obtiene al hacer girar, alrededor del eje x , el arco de la curva sinusoidal $y = f(x) = \frac{\pi}{2} \sin x$, comprendido entre los puntos $A = (0,0)$ y $B = (\pi, 0)$, suponiendo que el sistema coordenado está graduado en centímetros.

Solución: sustituyendo en (11), tenemos que el volumen buscado es:

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_0^\pi \pi \left(\frac{\pi}{2} \sin x \right)^2 dx = \frac{\pi^4}{8} \text{ cm}^3$$

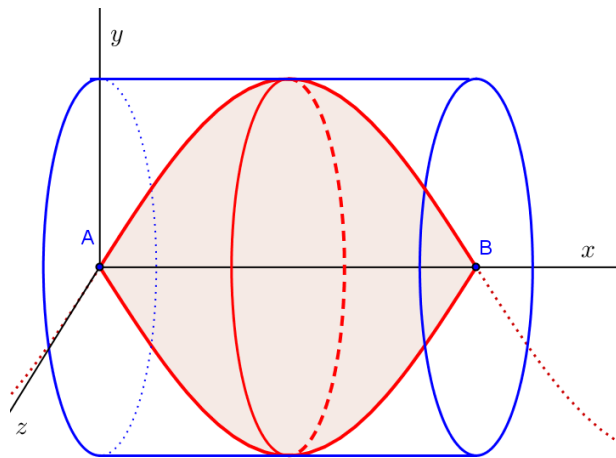


Figura 14

Observemos que el cilindro, en el que está inscrito el sólido de interés, tiene radio (amplitud de la senoidal) $\frac{\pi}{2}$ y altura $AB = \pi$, de manera que su volumen es $\pi \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \pi = \frac{\pi^4}{4} \text{ cm}^3$. De esta manera obtenemos que el volumen del sólido de revolución en cuestión es exactamente la mitad del volumen del cilindro que lo circunscribe.

Como segundo ejemplo vamos a calcular el volumen del sólido que se obtiene al girar la región del plano xy , comprendida entre las gráficas de $y = 0$ (eje x), $y = x^5 + x + 1$, $x = 0$ y $x = 1$, alrededor del eje y (figura 15, izquierda), suponiendo que el sistema coordenado está graduado en centímetros.

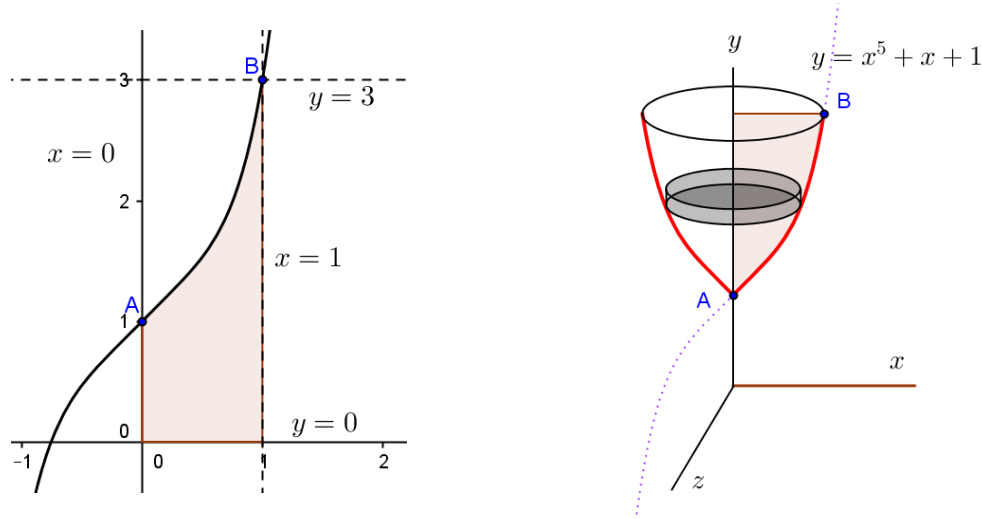


Figura 15

Solución: en este caso podemos calcular el volumen como la diferencia entre el volumen del cilindro en el que está inscrito el sólido, y el del sólido que se obtiene al girar la región comprendida entre las gráficas de $y = x^5 + x + 1$, $x = 0$ y $y = 3$, alrededor del eje y , el cual se puede calcular como en el ejemplo anterior.

Tenemos pues que el volumen del cilindro es $V_{cil} = \pi(1)^2(3) = 3\pi$. Por otra parte, denotando por V_h al volumen que vamos a restar, tenemos que el elemento de volumen de este sólido es $dV = \pi x^2 dy$, con $1 \leq y \leq 3$ así que:

$$V = \int dV = \int_1^3 \pi x^2 dy$$

Pero $y = x^5 + x + 1$, así que $dy = (5x^4 + 1) dx$. Además, cuando $y = 1$, $x = 0$ y cuando $y = 3$, $x = 1$, de manera que:

$$V_h = \int dV = \int_0^1 \pi x^2 (5x^4 + 1) dx = \pi \int_0^1 (5x^6 + x^2) dx = \pi \left[\frac{5}{7}x^7 + \frac{1}{3}x^3 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{22}{21}\pi \text{ cm}^3$$

Por lo tanto, el valor del volumen buscado es:

$$V = V_{cil} - V_h = 3\pi - \frac{22}{21}\pi = \frac{41}{21}\pi \text{ cm}^3$$

Método de los cilindros huecos. Vamos a calcular el volumen de la región del problema anterior, pero eligiendo ahora el elemento de otra manera: en lugar de la contribución elemental en forma de disco, consideraremos ahora una en forma de cilindro hueco, tal y como se muestra en la figura 7.33.

En este caso la contribución elemental es un cilindro que, al hacerle un corte paralelo al eje y se obtiene un cilindro hueco, de espesor infinitesimal dx , y que, al desenrollarlo se

obtiene un prisma rectangular (de espesor dx) cuya base es el perímetro de la circunferencia del anillo ($2\pi x$), y cuya altura es y , así que el valor del elemento de volumen es $2\pi xy \, dx$. Y como el sólido de interés se genera al variar x desde 0 hasta 1, tenemos que el volumen buscado es:

$$V = \int dV = \int_0^1 2\pi xy \, dx = 2\pi \int_0^1 x (x^5 + x + 1) \, dx = 2\pi \int_0^1 (x^6 + x^2 + x) \, dx$$

$$V = 2\pi \left[\frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{x=0}^{x=1} = 2\pi \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{41}{21}\pi \, \text{cm}^3$$

Obteniendo, claro, el mismo resultado que con el método de los discos.

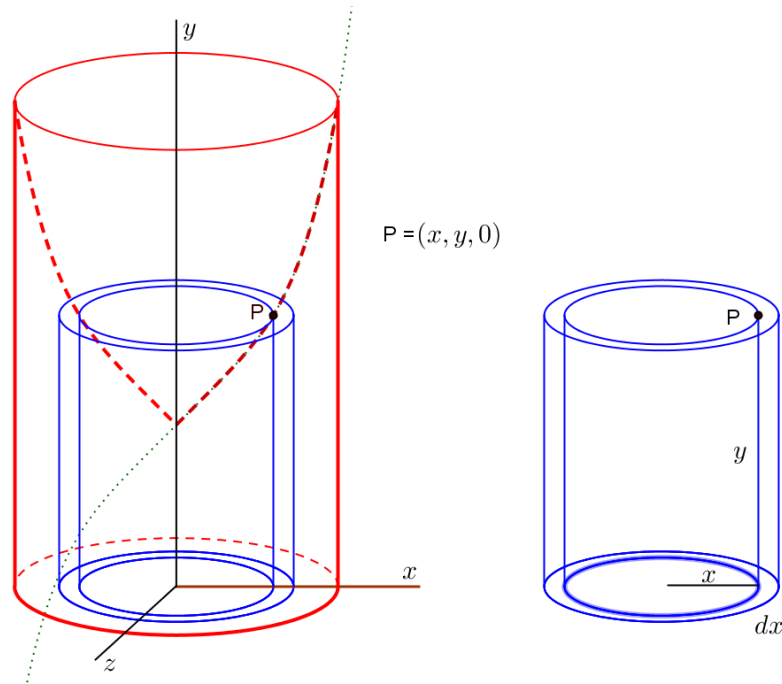


Figura 16