

INTEGRAL DEFINIDA Y ÁREA BAJO LA CURVA

1. INTEGRAL DEFINIDA. DEFINICIÓN

Hemos visto que la operación de integración es la inversa de la diferenciación. En este último capítulo hablaremos del proceso de integración, el cual es de suma importancia en el estudio de las ciencias básicas y de la ingeniería. Pero antes de describir el proceso la siguiente definición es necesaria:

La <i>integral (definida)</i> de una función f , en el intervalo $[a, b]$, se denota y define mediante: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ donde F es una primitiva de f .	(1)
---	-----

Por otra parte, en textos de ciencias de la ingeniería, una notación particularmente utilizada para la integral definida es la siguiente:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

Por ejemplo:

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{3} (2)^3 - \frac{1}{3} (1)^3 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

2. PROCESO DE INTEGRACIÓN. UN EJEMPLO: EL ÁREA DE UN CÍRCULO

Supongamos que el valor de una cantidad P depende del valor de una variable x , es decir P es una función de x , y que un valor de interés de dicha cantidad se genera conforme x cambia su valor de a a b , de manera que $P(a) = 0$ y $P(b) = P$, es decir, la cantidad a medir se genera desde cero hasta su valor total, conforme la variable recorre un cierto intervalo.

Supuesto lo anterior, si además se puede establecer que, cuando x tiene un incremento infinitesimal dx la correspondiente variación de P se puede expresar mediante $dP(x) = g(x)dx$, entonces $P(x)$ se podrá obtener al calcular la integral de $g(x)$.

Vamos a ejemplificar esto calculando el área de un círculo (cuyo valor es conocido). El proceso consistirá en “generar” un círculo por la variación de una variable, identificar el área de una porción del círculo como una función de esa variable, expresar la variación infinitesimal de esa área como producto de esa función y la diferencial de esa variable y, finalmente, integrar esta función.

Cuando se realiza este proceso en el estudio de las ciencias es probable que se pueda hacer de más de una manera, según el caso considerado. Cada uno de esos casos da lugar a una integral más o menos difícil de integrar. A veces tendremos que intentar de más de una manera para obtener una expresión para la cual se pueda obtener más fácilmente una primitiva.

Generación por sectores circulares. Supongamos, para empezar, que generamos el círculo por la rotación del radio OA (figura 1), de manera que al variar el ángulo θ desde 0 hasta 2π , el área va de 0 a la del círculo completo.

Ahora bien, cuando el ángulo tiene una variación infinitesimal $d\theta$, el área $A(\theta)$ tiene una variación dA dada por el área del sector circular OPQ, pero, debido a que P y Q están infinitamente próximos entre sí, el arco PQ es rectilíneo y el sector es entonces un triángulo (isósceles). Escogiendo como base el arco infinitesimal PQ ($= a d\theta$), la altura será el radio a de la circunferencia, de manera que $dA = \frac{1}{2}(a d\theta)a = \frac{1}{2}a^2 d\theta$.

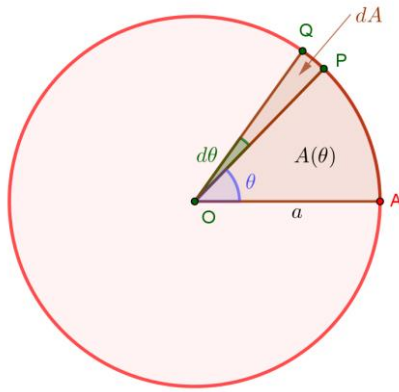


Figura 1

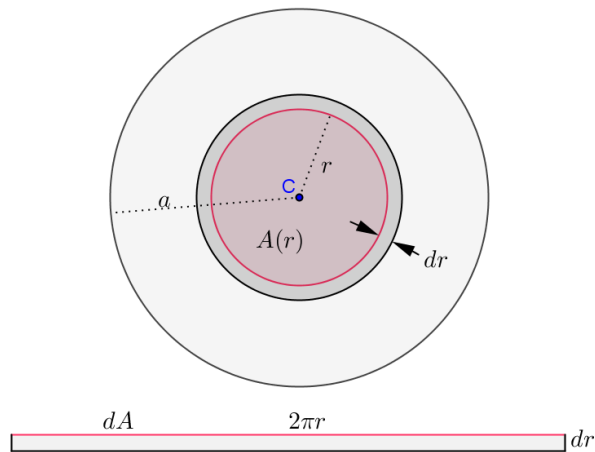


Figura 2

Al integrar esta expresión obtenemos que $A(\theta) = \frac{1}{2}a^2\theta$, por lo tanto, el área del círculo será $A(2\pi) = \pi a^2$.

Generación por anillos. Consideremos ahora que generamos un círculo (de radio a) por la expansión de un círculo de radio variable cuyo valor va de 0 hasta a (figura 2), de manera que cuando el radio tiene una variación infinitesimal dr el área del círculo tiene un incremento igual al área del anillo comprendido entre los círculos de radio r y $r + dr$.

Como el incremento del radio es infinitamente pequeño, al “desenrollar” el anillo obtendremos un rectángulo de dimensiones $2\pi r$ (la longitud de la circunferencia interior) y dr (la variación del radio). En realidad, en lugar de un rectángulo deberíamos considerar un trapecio isósceles, pero la diferencia en el valor de sus bases es despreciable. Así pues, $dA = 2\pi r dr$ y $A(r) = \pi r^2$. En particular $A(a) = \pi a^2$.

Tiras perpendiculares a un diámetro. Por último, consideremos que el primer cuadrante de un círculo de radio a se genera (figura 3) al mover el punto $P = (x, y)$ desde N (donde $x = 0$) hasta E (donde $x = a$).

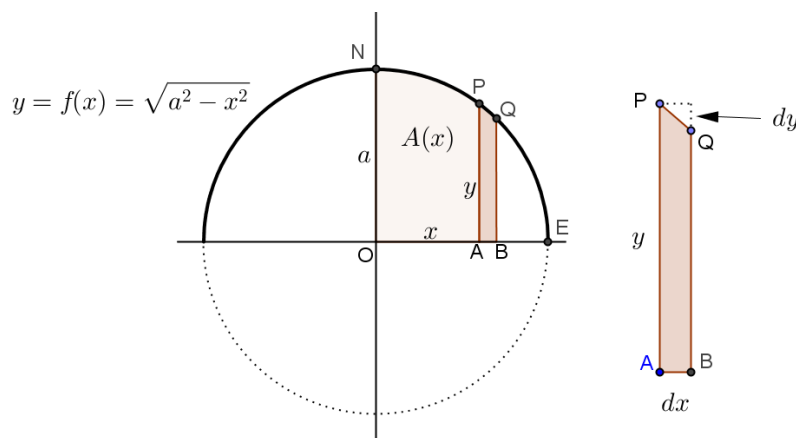


Figura 3

Como P es un punto de la circunferencia con centro en el origen y radio a , tenemos que $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Ahora bien, cuando x tiene un incremento dx ($= AB$), el punto sobre la circunferencia se mueve de P a Q y el correspondiente incremento en el valor del área $A(x)$ será (de acuerdo con la figura) el área del trapecio ABQP que es el rectángulo con base AB ($= dx$) y altura y , menos el triángulo rectángulo con hipotenusa en PQ, cuyos catetos miden dx y dy , de manera que:

$$dA(x) = y dx - \frac{1}{2} dx dy$$

Como el segundo término del lado derecho es un infinitesimal de segundo orden, resulta despreciable respecto del primero, de manera que $dA(x) = y dx$. Por lo tanto:

$$A(x) = \int y dx = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsen \frac{x}{a}$$

En particular, para $x = a$, $A(a) = 0 + \frac{a^2}{2} \arcsen 1 = \frac{a^2}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} \pi a^2$.

3. EL PROCESO DE INTEGRACIÓN

El procedimiento llevado a cabo en la sección anterior, para calcular el área del círculo, puede ser generalizado para calcular el valor de una cantidad si se conoce el valor de una parte infinitamente pequeña de la misma.

Veamos, sabiendo que la diferencial de una variable es un incremento infinitesimal de la misma y que la operación de integración es la inversa a la de la diferenciación, podemos calcular una cantidad mediante la integración si conocemos el incremento infinitesimal de la misma, que corresponde a un incremento infinitesimal de alguna variable.

Así pues, supóngase que se desea obtener el valor de una cierta cantidad variable P , y que podemos expresar el valor de una variación infinitesimal dP de la misma (a la que llamaremos *elemento* de P), correspondiente a una variación infinitesimal dx (de alguna variable x), como el producto de una expresión que depende de esa variable y su diferencial, es decir $dP(x) = f(x)dx$.

De esta manera, si F es una primitiva de f , es decir, si $F'(x) = f(x)$, entonces $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$, así que $dP(x) = f(x)dx = dF(x)$, por lo que $P(x)$ y $F(x)$ difieren en

una constante, es decir $P(x) = F(x) + C$. Suponiendo además que $P(a) = 0$, es decir, que el valor de P es cero cuando $x = a$, se tendrá entonces que $P(a) = 0 = F(a) + C$, de donde $C = -F(a)$, así que $P(x) = F(x) - F(a)$.

Finalmente, si el valor deseado de P es el que corresponde a $x = b$, se tendrá entonces que $P(b) = F(b) - F(a)$, es decir $P(b) = \int_a^b f(x) dx$. En resumen:

Sabiendo que una variación infinitesimal de P, correspondiente a una variación dx de una variable x, está dada por $dP(x) = f(x)dx$, que F es cualquier primitiva de f, y que $P(a) = 0$, entonces el valor de P, correspondiente a $x = b$, estará dado por: $P(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$	(2)
--	-----

4. EL ÁREA BAJO LA CURVA

Siendo f una función definida mediante $y = f(x)$, llamaremos *área bajo la gráfica* de f en el intervalo $[a, b]$, que denotaremos mediante $A_a^b(f)$, al área de la región comprendida entre la gráfica de f , el eje x ($y = 0$) y las rectas $x = a$ y $x = b$.

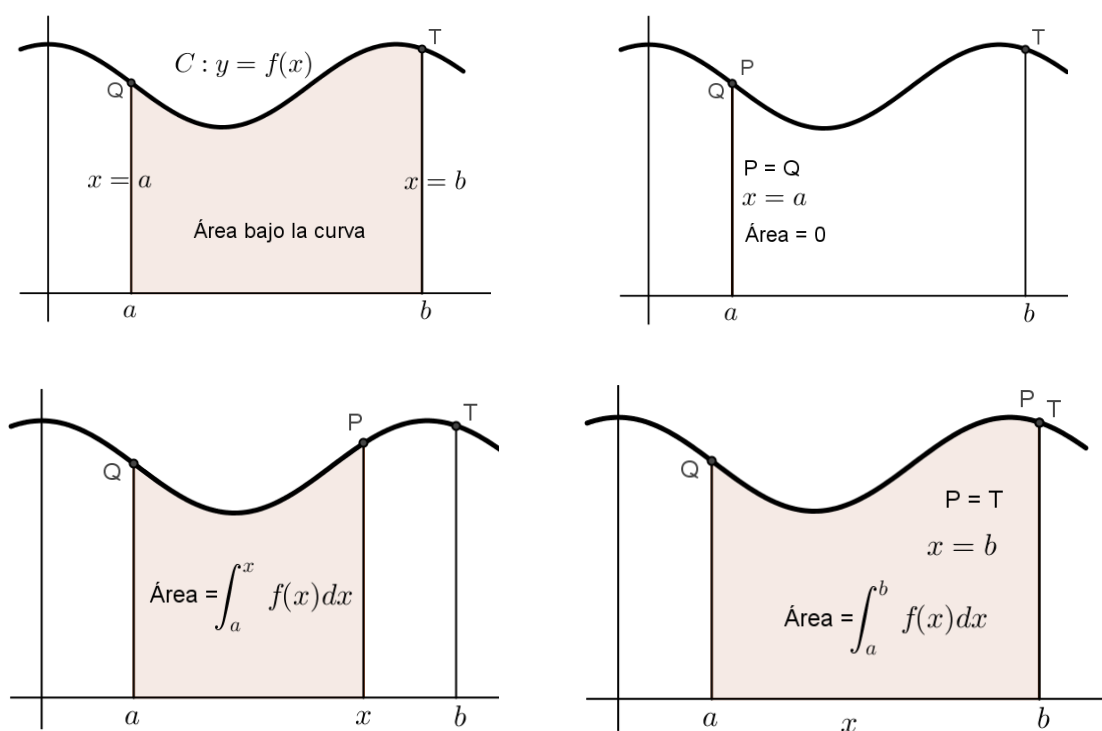


Figura 4

Vamos a realizar el proceso antes descrito para calcular el área bajo la curva. Para ello supongamos una curva C , definida mediante $y = f(x)$, siendo f una función continua y con

valores no negativos en un intervalo $[a, b]$, y consideremos un punto P que se mueve sobre la curva desde $Q = (a, f(a))$ hasta $T = (b, f(b))$.

Observemos (figura 4) que este movimiento genera la región cuya área queremos calcular, de manera tal que, conforme el punto sobre la curva se desplaza desde la posición correspondiente a $x = a$ (punto Q), hasta la correspondiente a $x = b$ (punto T), el área bajo la curva varía desde cero hasta el valor total buscado. Para cualquier valor de x , entre a y b , el área sería la indicada por $A(x)$ en la figura 4 (abajo, izquierda).

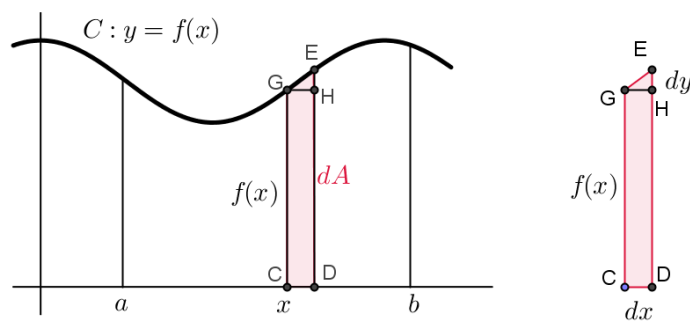


Figura 5

Ahora bien, siendo G y E (figura 5) dos puntos de la curva, infinitamente próximos entre sí, cuando el punto se desplaza de G a E, las coordenadas x y y tendrán incrementos dx ($= CD = GH$) y dy ($= HE$), respectivamente, y la correspondiente diferencial del área, es decir, el elemento de área será el área del trapecio CDEG. Así pues:

$$dA = \text{área del trapecio CDEG}$$

$$dA = \text{área del rectángulo CDHG} + \text{área del triángulo GHE}$$

$$dA = f(x)dx + \frac{1}{2}dx dy = f(x)dx$$

Además, sabemos que $A(a) = 0$ (figura 4, arriba, izquierda), y que $A(b) = A$ es el área que queremos calcular, así que, si F es una primitiva de f , se tendrá:

$A_a^b(f) = \int_a^b f(x) dx$	(3)
-------------------------------	-------

Por ejemplo, si C es la parábola definida por $y = ax^2$, con $a > 0$, el área bajo esta curva, desde $x = 0$ (vértice) hasta $x = b$, será:

$$A_a^b(f) = \int_0^b ax^2 dx = \frac{1}{3}ax^3 \Big|_{x=0}^{x=b} = \frac{1}{3}ab^3$$

Notemos que el área del rectángulo en el que está inscrito el sector parabólico es $b(ab^2) = ab^3$, así que el sector parabólico, que aparece sombreado en la figura 6, cubre exactamente la tercera parte del rectángulo en el que está inscrito. Este es uno de los resultados obtenidos, hace más de dos milenios, por el gran científico griego Arquímedes.

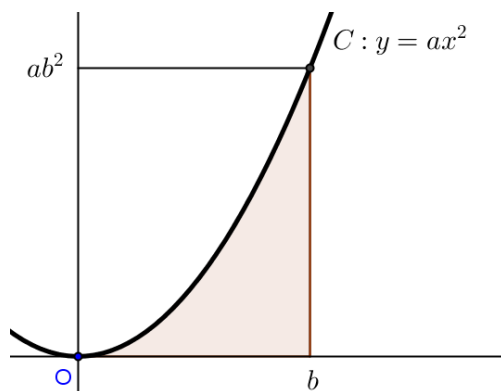


Figura 6

Valor promedio de una función. Consideremos una curva C , definida por $y = f(x)$. Llamaremos *valor promedio* (o *altura promedio*) de f en $[a, b]$, denotado por $f_{\text{prom}}[a, b]$, a la altura del rectángulo con base en el segmento AB , correspondiente al intervalo $[a, b]$ (figura 7) cuya área sea igual al área bajo la gráfica de f en $[a, b]$. De acuerdo con esto, tenemos que $A_a^b(f) = \int_a^b f(x) dx = AB \cdot f_{\text{prom}}[a, b] = (b - a) \cdot f_{\text{prom}}[a, b]$. Por lo tanto:

$f_{\text{prom}}[a, b] = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$	(4)
--	------------

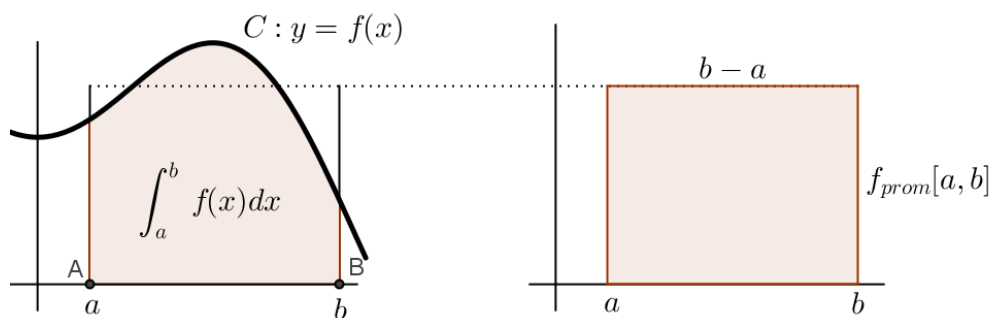


Figura 7

Además, siendo f continua en $[a, b]$, considerando que el valor de $f_{\text{prom}}[a, b]$ está entre el mínimo y el máximo valor de f en el intervalo, y que éstos corresponden a valores de x en el mismo intervalo, entonces deberá existir al menos un número z en el intervalo, cuya imagen sea el valor promedio de la función en el mismo, es decir:

Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe al menos un $z \in [a, b]$, tal que:	$f(z) = f_{\text{prom}}[a, b] = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$	(5)
--	---	------------

Por ejemplo, si f es la función definida por $f(x) = \sin x$ y $[a, b] = [0, \pi]$ y el sistema coordenado está graduado en centímetros, tenemos que:

$$A_0^\pi(f) = \int_0^\pi \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$$

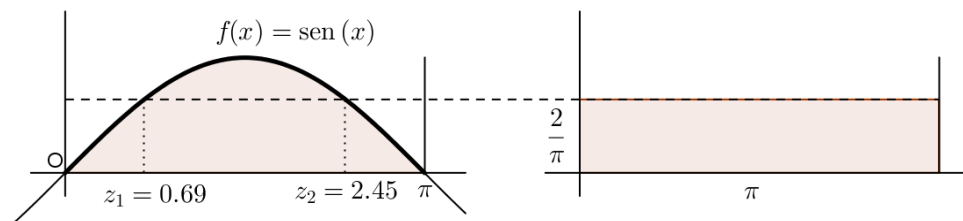


Figura 8

Así pues, el área de la región sombreada en la figura 8 (izquierda) es de 2 cm^2 . El valor promedio de la función dada, en el intervalo propuesto es entonces:

$$f_{\text{prom}}[0, \pi] = \frac{1}{\pi}(2) = \frac{2}{\pi} \cong 0.637 \text{ cm}$$

Además, si $f(z) = \sin z = \frac{2}{\pi}$, entonces tenemos dos valores de z en el intervalo $[0, \pi]$, que son $z_1 \cong 0.69 \text{ cm}$ y $z_2 \cong 2.45 \text{ cm}$.

Teorema fundamental del cálculo. De acuerdo con la definición dada para el área bajo la curva, si consideramos una curva C , definida mediante $y = f(x)$, siendo f una función continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$, y si t es un elemento de este intervalo, entonces el área bajo la curva, en el intervalo $[a, t]$ es una función de t , definida por:

$$A_a^t(f) = \int_a^t f(x) \, dx = A(t)$$

Esta función corresponde al área de la región sombreada en la figura 9.

Vamos a calcular la derivada de esta función: siendo F una primitiva de f , tenemos que $A'(t) = D_t \left[\int_a^t f(x) \, dx \right] = D_t[F(t) - F(a)] = F'(t) = f(t)$, es decir:

$D_t \left[\int_a^t f(x) \, dx \right] = f(t)$	(6)
---	-------

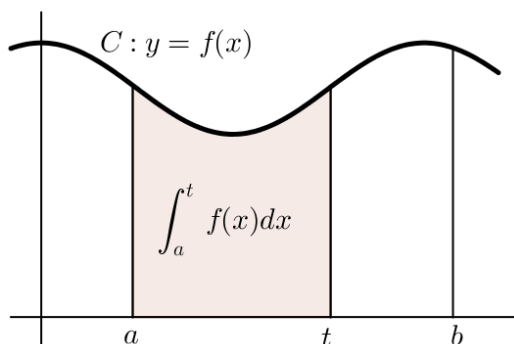


Figura 9

Este resultado se conoce como *teorema fundamental del cálculo*. Por ejemplo, tenemos que $D_t \left[\int_2^t \cos(e^{x^2}) dx \right] = \cos(e^{t^2})$.

5. EL ÁREA BAJO LA CURVA Y LA INTEGRAL DEFINIDA

Considerando la anteriormente expuesto, podemos afirmar que la integral definida de una función, definida mediante la ecuación (3), proporciona el valor del área bajo la curva si la función es continua y no negativa en el intervalo de integración. Vamos a considerar ahora la relación entre la integral definida y el área bajo la curva en distintas situaciones de interés.

- a) *La función es continua y positiva en todo el intervalo.* En este caso la integral proporciona el valor del área bajo la curva.

Por ejemplo, si f es la función definida mediante $f(x) = \ln x$, tiene como dominio al conjunto de los números reales positivos, y como $f'(x) = \frac{1}{x}$, entonces f es creciente en todo su dominio. Además, como $f(1) = 0$, tenemos entonces que $f(x) \geq 0$ si $x \geq 1$.

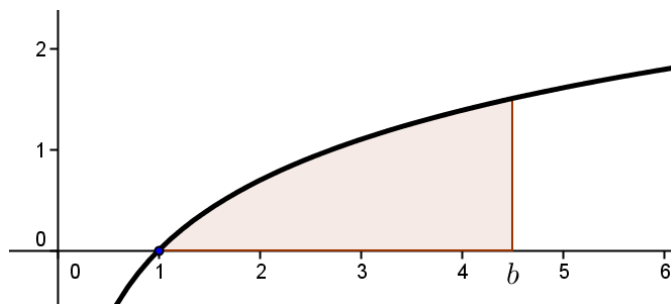


Figura 10

De esta manera, la integral de la función desde 1 hasta un número b , mayor que 1, será el área de la región sombreada en la figura 10, y estará dada por:

$$A(b) = \int_1^b \ln x \, dx$$

Consultando en una tabla de integrales obtenemos:

$$A(b) = \int_1^b \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^b = b \ln b - b + 1$$

En la figura, $b = 4.5$, para el cual $A(4.5) \cong 3.268$ unidades cuadradas.

- b) *La función es continua y negativa en todo el intervalo.* En este caso la integral proporciona el negativo del valor del área “sobre” la curva, es decir, del área de la región situada por debajo del eje x , por encima de la curva, y entre las dos rectas $x = a$ y $x = b$. Esto se debe a que, en este caso, el valor de cada $dA = f(x)dx$ es siempre negativo, ya que $f(x) < 0$ en todo el intervalo, mientras que dx es siempre positivo. De esta manera, la suma de todas estas cantidades (infinitesimales) negativas, también será negativa.

Este resultado nos indica que el valor de la integral puede ser negativo, pero no debe olvidarse que *el área no puede ser negativa*.

Por ejemplo, si f está definida mediante $f(x) = e^{-x} - 2$, entonces $f'(x) = -e^{-x} < 0$ para toda x real, así que la función es decreciente en todo su dominio. Como $f(0) = -1$, entonces f es negativa desde 0 hasta infinito, así que la integral de f desde 0 hasta b (siendo b cualquier número positivo), será el negativo del área de la región comprendida entre el eje x , la gráfica de f , el eje y y la recta $x = b$ (figura 11).

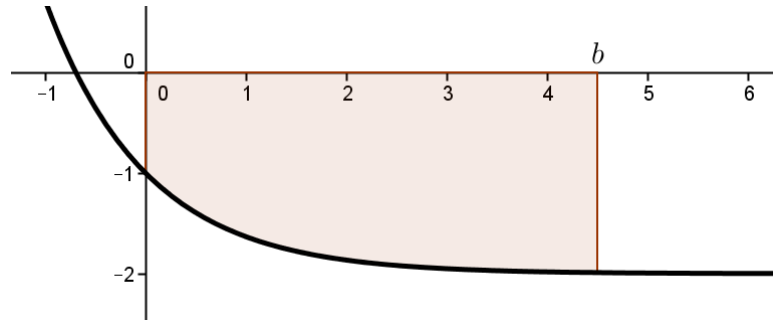


Figura 11

El valor de la integral es:

$$\int_0^b f(x) \, dx = \int_0^b (e^{-x} - 2) \, dx = [-e^{-x} - 2x]_0^b = -e^{-b} - 2b + 1$$

Si $b = 4.5$ (que corresponde a la figura 11), $\int_0^b f(x) \, dx \cong -8.011$, de manera que el área de la región sombreada en la figura será de 8.011 unidades cuadradas.

- c) *La función es continua y cambia de signo una o más veces en el intervalo.* Siendo la función continua, sólo podrá cambiar de signo en los puntos en los que se anula. Podemos entonces considerar el valor de la integral, en el intervalo completo, como la suma de las integrales en cada uno de los intervalos separados por los puntos donde la función se anula, obteniendo en cada uno de estos, una integral que corresponde a uno de los dos casos anteriores.

De esta manera, las partes de la gráfica que se encuentren por encima del eje x contribuyen, en el valor total de la integral, con un valor positivo, mientras que las partes que se encuentren por debajo contribuyen con un valor negativo. En este caso, por lo tanto, la integral proporciona el valor de la diferencia entre la suma de las áreas de las partes situadas por encima del eje y y la suma de las situadas por debajo.

Por ejemplo, para la función coseno, es decir, la definida mediante $f(x) = \cos x$, tenemos que la gráfica intersecta al eje x en cada uno de los números $\frac{\pi}{2} \pm k\pi$, donde k es un entero. Consideremos la integral de cero a b , con $b > 0$ (figura 12), es decir:

$$I(b) = \int_0^b \cos x \, dx = \sin b$$

Tenemos entonces que el valor de la integral de la función coseno, desde cero hasta b , es precisamente el valor de la función seno en b .

Tomando en cuenta la periodicidad de la función, que implica algunas simetrías en la curva, podemos retomar el caso de la región correspondiente a un cuarto de ciclo, es decir, de cero a pi medios: $I\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$.

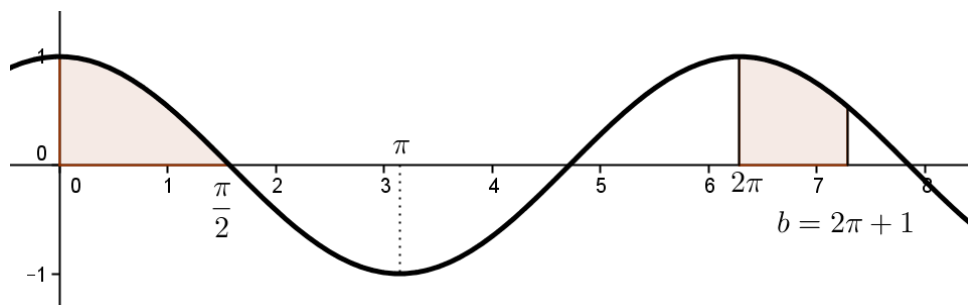


Figura 12

Con base en este resultado, podemos decir que la integral en el primer medio ciclo (del eje y hasta la línea punteada en la figura), es decir, de cero hasta pi, debe anularse, porque tenemos regiones con áreas iguales por encima y por debajo del eje x: $I(\pi) = \sin \pi = 0$.

Ahora supongamos que $b = 2\pi + 1$. Ya que el área desde 0 hasta 2π es cero, la integral desde 0 hasta $2\pi + 1$ debe ser la misma que la del intervalo de 2π a $2\pi + 1$, que es el área de la región sombreada en el lado derecho de la figura 12: $I(2\pi + 1) = I(1) = \sin 1 \cong 0.8415$.

6. CÁLCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS

Vamos a abordar ahora el cálculo de una integral definida, cuando se hace un cambio de variable, se integra por partes, o se utiliza una serie de potencias. Además veremos el *método del trapecio*, que es, de los métodos numéricos más utilizados, el más sencillo de aplicar, particularmente cuando el único auxiliar en el proceso es una calculadora común.

Integración por partes. Sabemos que $d(uv) = u dv + v du$, de manera que $u dv = uv - v du$ y al integrar en el intervalo $[a, b]$, se obtiene $\int_a^b u dv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v du$, es decir:

$\int_a^b u dv = uv \Big _a^b - \int_a^b v du$	(7)
--	-------

Supongamos, por ejemplo, que deseamos calcular $\int_1^3 x^3 \ln x dx$. Si $u = \ln x$ y $dv = x^3 dx$, entonces $du = \frac{1}{x} dx$ y $v = \frac{1}{4} x^4$, así que, de acuerdo con (7), tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_1^3 x^3 \ln x dx &= \frac{1}{4} x^4 \ln x \Big|_1^3 - \frac{1}{4} \int_1^3 x^3 dx = \left(\frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 \right) \Big|_1^3 \\ &= \frac{1}{4} (3^4 \ln 3 - 1^4 \ln 1) - \frac{1}{16} (3^4 - 1^4) = \frac{81}{4} \ln 3 - 5 \cong 17.247 \end{aligned}$$

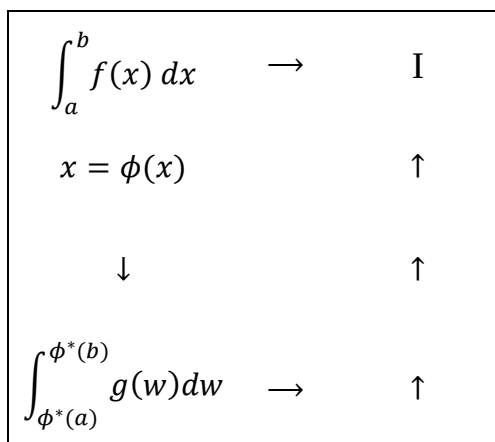


Figura 13

Integración por cambio de variable. Sabemos que, si se hace el cambio de variable $x = \phi(w)$, entonces la integral $\int f(x)dx$ se transforma en $\int f[\phi(w)]\phi'(w)dw = \int g(w)dw$.

Ahora bien, si la integral es definida y tomamos en cuenta que los límites de integración indican el intervalo que recorre la variable de integración, entonces estos límites deberán ser sustituidos por los correspondientes valores de la nueva variable w . Es decir, sabiendo que $w = \phi^*(x)$, tenemos que, cuando $x = a$, el valor de w será $\phi^*(a)$, y cuando $x = b$, w valdrá $\phi^*(b)$, de manera que los límites de integración cambian según se indica en la figura 13.

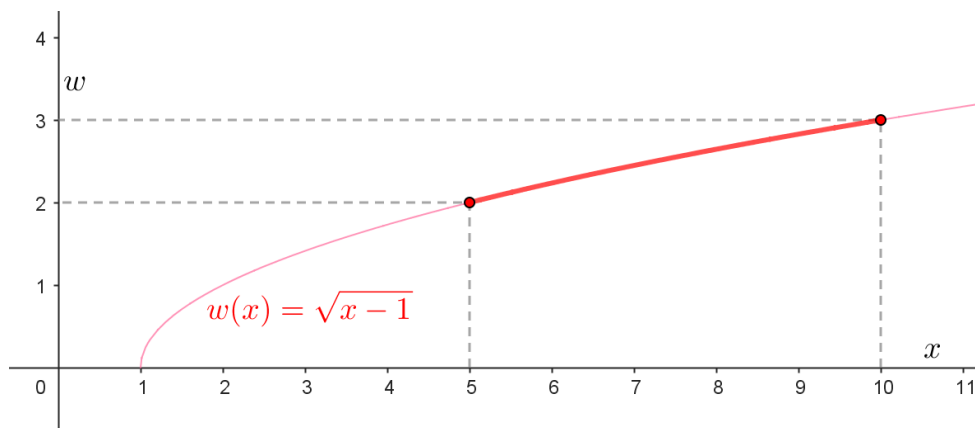


Figura 14

Por ejemplo, si $I = \int_5^{10} \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} dx$, entonces, al hacer la sustitución $w = \sqrt{x-1}$, tendremos que $w^2 = x - 1$, $x = w^2 + 1$ y $dx = 2w dw$.

Por otra parte, para los límites de integración (figura 14), tenemos que, cuando $x = 5$ el valor de $w = 2$ y cuando $x = 10$, $w = 3$. De esta manera el valor de la integral propuesta es:

$$I = \int_5^{10} \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} dx = \int_2^3 \frac{(w^2+1)^2}{w} (2w dw) = 2 \int_2^3 (w^2 + 1)^2 dw$$

$$I = \int_5^{10} \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} dx = 2 \int_2^3 (w^4 + 2w^2 + 1) dw = 2 \left(\frac{1}{5} w^5 + \frac{2}{3} w^3 + w \right) \Big|_2^3$$

$$I = 2 \left[\frac{1}{5} (3^5 - 2^5) + \frac{2}{3} (3^3 - 2^3) + (3 - 2) \right] = \frac{2}{5} (243 - 32) + \frac{4}{3} (27 - 8) + 2$$

$$I = \int_5^{10} \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} dx = \frac{1676}{15} \cong 111.73$$

Uso de series de potencias. Cuando se recurre a una o más series de potencias, para el cálculo de una integral definida, deberá tomarse en cuenta el intervalo de convergencia de cada serie, ya que este deberá ser un subconjunto del intervalo de convergencia de cada una de las series utilizadas.

Por ejemplo, supongamos que se desea calcular $\int_0^1 \frac{\text{sen } x}{x} dx$. Así pues, observando el integrando podemos afirmar que, si se va a utilizar una serie de potencias, ésta deberá ser la de la función seno, cuyo intervalo de convergencia es el conjunto de todos los números reales. Así pues, no hay ningún impedimento para utilizar dicha serie.

Por otra parte, obsérvese que se busca el área bajo la curva $y = \frac{\text{sen } x}{x}$, en el intervalo $[0,1]$ (figura 15), y hay que recordar que esta función tiene una discontinuidad de hueco en $x = 0$, que es el extremo izquierdo del intervalo de integración. Sin embargo, el área bajo un punto es la de un segmento de recta, que es cero, de manera que la existencia del hueco no altera el valor del área buscada.

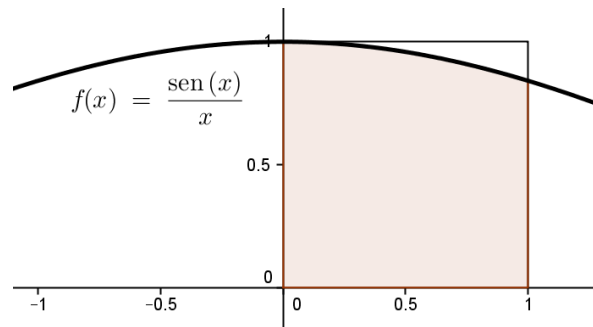


Figura 15

Ahora bien, el desarrollo en serie de potencias (alrededor del cero) está dado por:

$$\text{sen } x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots$$

Dividiendo tal serie por x , obtenemos $\frac{\text{sen } x}{x} = 1 - \frac{1}{3!} x^2 + \frac{1}{5!} x^4 - \frac{1}{7!} x^6 + \dots$, y, por lo tanto:

$$\int_0^1 \frac{\text{sen } x}{x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{3!} x^2 + \frac{1}{5!} x^4 - \frac{1}{7!} x^6 + \dots \right) dx$$

$$\int_0^1 \frac{\text{sen } x}{x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{3!} x^2 + \frac{1}{5!} x^4 - \frac{1}{7!} x^6 + \dots \right) dx =$$

$$= \left[x - \frac{1}{3 \cdot 3!} x^3 + \frac{1}{5 \cdot 5!} x^5 - \frac{1}{7 \cdot 7!} x^7 + \dots \right] \Big|_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \dots$$

Si consideramos sólo los cuatro primeros términos de esta serie, obtenemos:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \cong 1 - 0.055555 + 0.001667 - 0.000028 \cong 0.946084$$

En la figura 15 se puede observar que el área bajo la curva es ligeramente menor que la del cuadrado de lado 1, por lo cual el valor de la integral deberá ser ligeramente menor que la unidad, lo que concuerda con el resultado obtenido.

Integración numérica: método del trapecio. Recordemos que una curva puede ser vista como una poligonal con número infinito de lados, uniendo, cada uno de ellos dos puntos infinitamente próximos entre sí. De acuerdo con esto, si la gráfica de una función está toda por encima del eje x , en todo un intervalo $[a, b]$, y consideramos el intervalo dividido en un número N , infinitamente grande de subintervalos de longitud $dx = \frac{b-a}{N}$, el valor de la integral, es decir, el área bajo la curva será igual a la suma de áreas de la infinidad de trapecios de altura dx .

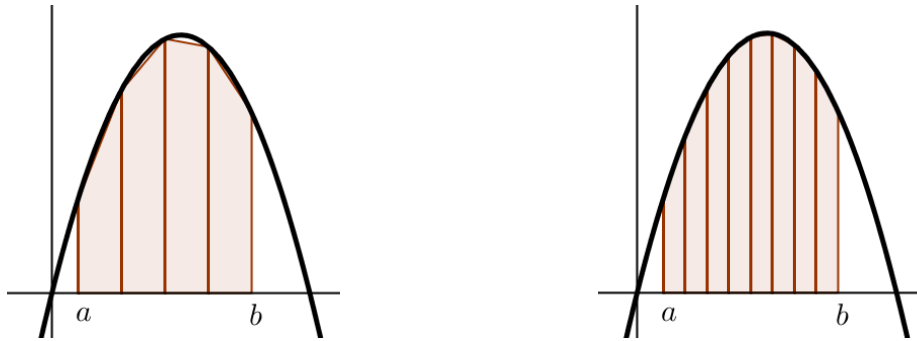


Figura 16

Ahora bien, si en lugar de dividir en una infinidad de subintervalos, lo hacemos en un número finito n de subintervalos, de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, el área bajo la curva, en cada subintervalo, ya no coincide con el área bajo el segmento rectilíneo, pero si se aproxima a este, sobre todo si Δx es pequeña. En la figura 16 se muestra la gráfica de una función en un intervalo $[a, b]$, que se ha dividido en 4 y 8 partes (izquierda y derecha, respectivamente), y podemos observar que, con apenas 8 subintervalos ya se confunde la suma de los trapecios con el área bajo la curva. Veamos ahora cómo calcular esta suma.

El área bajo el segmento rectilíneo (figura 17), correspondiente al subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, está dada por $A_k = \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \Delta x$, así pues, una aproximación del área bajo la curva en el intervalo $[a, b]$, o más precisamente, de la integral de la función en dicho intervalo, está dada por:

$$\int_a^b f(x) dx \cong \sum_{k=1}^n A_k = \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \Delta x = \frac{\Delta x}{2} \sum_{k=1}^n [f(x_{k-1}) + f(x_k)]$$

O bien por:

$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})) + f(x_n)]$	(8)
--	-----

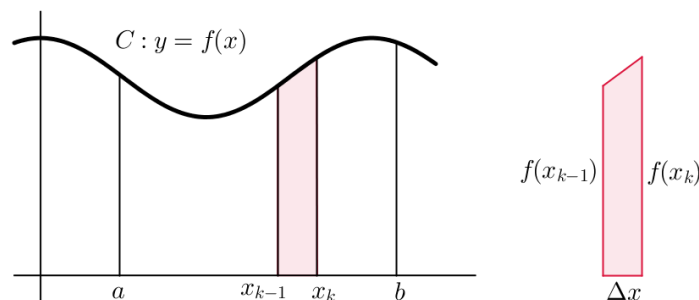


Figura 17

Como ejemplo vamos a obtener una aproximación de $\int_0^1 \frac{\text{sen } x}{x} dx$, lo cual fue hecho anteriormente recurriendo a la serie de potencias de $\text{sen } x$.

Así pues, siendo $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$, $a = 0$, $b = 1$ y proponiendo $n = 4$, tenemos que:

$$\Delta x = \frac{1-0}{4} = 0.25, x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75 \text{ y } x_4 = 1$$

Entonces:

$$f(x_0) = 1,$$

$$f(x_1) = f(0.25) = \frac{\text{sen } 0.25}{0.25} \cong 0.989616,$$

$$f(x_2) = f(0.5) = \frac{\text{sen } 0.5}{0.5} \cong 0.958851,$$

$$f(x_3) = f(0.75) = \frac{\text{sen } 0.75}{0.75} \cong 0.908852 \text{ y}$$

$$f(x_4) = f(1) = \frac{\text{sen } 1}{1} \cong 0.841471$$

Al sustituir en (8), se obtiene:

$$\int_a^b \frac{\text{sen } x}{x} dx \cong \frac{0.25}{2} [1 + 2(0.989616 + 0.958851 + 0.908852) + 0.841471]$$

$$\int_a^b \frac{\text{sen } x}{x} dx \cong 0.9445114$$

Que es un resultado semejante al obtenido mediante la serie de potencias.

Uso de tablas, calculadora y software especializado. En realidad, no se requiere ser un experto en los métodos de integración, aunque sí es importante conocer cada uno de los métodos antes descritos. En la actividad profesional podemos recurrir a software para cálculo numérico (para integrales definidas) e incluso simbólico (para integrales indefinidas). Lo verdaderamente importante es comprender por qué surge una integral en un proceso de modelación y el significado de la integral en el modelo en cuestión.

En particular, si se utiliza geogebra para calcular, por ejemplo $\int_1^{4.5} \ln x \, dx$, primeramente, introducimos la función (integrand) en el cuadro de entrada: $f(x)=\log(x)$ y aparecerá la gráfica de la función, luego de lo cual introducimos la integral: $\text{Integral}[f,1,4.5]$ y aparecerá la región de integración resaltada en color (figura 18) y el valor (aproximado) de la integral, tanto en el espacio de la vista algebraica como en la gráfica misma (3.27, en este caso, si se usa redondeo de dos cifras).

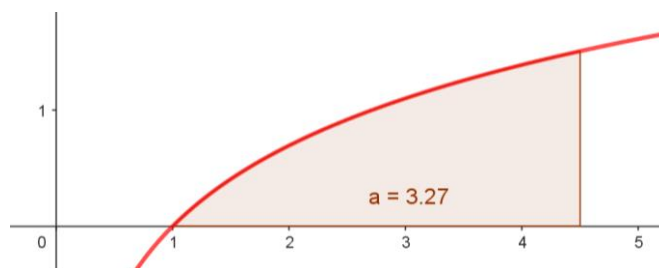


Figura 18

En el estudio de las ciencias de la ingeniería, en un proceso de modelación, resulta frecuente que el elemento de la cantidad por determinar esté expresado en términos de un elemento geométrico, como un arco curvilíneo o el área de una región plana, si se modela en el plano, o el área o el volumen interior de una región en el espacio.

Así pues, resulta de interés el aprender a elegir un elemento de arco o del área de una región en el plano y calcular la cantidad geométrica mediante la integración (suma) de todas las contribuciones elementales.