OPERACIÓN DE INTEGRACIÓN Y CÁLCULO DE PRIMITIVAS

Hemos estudiado el Cálculo diferencial, cuyo principio básico radica en observar los objetos, no en su totalidad sino más bien a través de una parte infinitamente pequeña de estos. Más específicamente, como lo haría Newton, considerando que las cantidades manifiestan su variación con el paso del tiempo, podemos observar la variación de cada cantidad en un intervalo infinitamente pequeño de tiempo y comparar dos de estas variaciones entre sí.

La operación básica fue entonces la de la diferenciación, es decir, el cálculo de la diferencial, la cual se definió como la variación infinitamente pequeña de una cantidad variable, pero que también la podemos considerar como una parte infinitamente pequeña de la cantidad variable. Ahora vamos a considerar algo así como "el camino de regreso"; es decir, vamos a ver cómo recuperar el valor de la cantidad entera, mediante el conocimiento de una parte infinitamente pequeña de la misma, a la que se denomina elemento.

1. DEFINICIONES Y PROPIEDADES BÁSICAS

Llamaremos *integración* a la operación inversa a la diferenciación. Es decir, si la diferencial de $F(x)$ es $dF(x) = F'(x)dx = G(x)dx$, entonces diremos que la integral de $G(x)dx$, denotada por $\int G(x)dx$ es $F(x)$. Así pues, por medio de la integración se obtiene una función cuya diferencial conocemos. Simbólicamente:

$\int G(x)dx = F(x)$ si $dF(x) = F'(x)dx = G(x)dx$, es decir, si $F'(x) = G(x)$	(1)

Por ejemplo, sabemos que $d(2x^3) = 6x^2dx$, por lo tanto $\int 6x^2dx = 2x^3$. Análogamente $\int 2x\cos(x^2)\ dx = \text{sen}\ (x^2)$, ya que $d\big(\text{sen}\ (x^2)\big) = 2x\cos(x^2)\ dx$.

Por otra parte, si $F'(x) = G(x)$, diremos que F es una *primitiva* (o *antiderivada*) de G. Por ejemplo la derivada de $2x^3$ es $6x^2$, así que $2x^3$ es una primitiva de $6x^2$.

Ahora bien, considerando que la diferencial de una constante es cero, podemos afirmar que:

Si F es una primitiva de f, entonces $F + C$ también es una primitiva de f	(2)

En efecto, suponiendo que F es una primitiva de f y que C es una constante, entonces $D_x(F(x) + C) = D_xF + D_xC = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$. Por lo tanto:

$\int G(x)dx = F(x) + C$, siempre que $F'(x) = G(x)$	(3)

Aquí leeremos “la integral de $G(x)dx$ es $F(x)+C$”. Llamaremos a C *constante de integración*.[1] Así pues, mientras que la derivada de una función dada es única, hay una infinidad de primitivas de la misma función; por ejemplo, el conjunto de primitivas de $6x^5$ es la familia de funciones x^6+C.

Esta situación establece una diferencia notable entre las operaciones de diferenciación (o de derivación) e integración, de manera que estas no resultan exactamente inversas. La derivada (y, por lo tanto, la diferencial) de una función es única, mientras que la primitiva no.[2]

En otras palabras, mientras que las derivadas de funciones iguales son iguales el recíproco no es cierto. Así pues:

Si las derivadas de dos funciones son iguales, entonces las funciones difieren en una constante: $$f'(x)=g'(x) \implies f(x)=g(x)+C$$	(4)

Por ejemplo, sabemos que $D_x(\sec^2 x)=2\sec x\ (\sec x\tan x)=2\sec^2 x\tan x$ y que $D_x(\tan^2 x)=2\tan x\ \sec^2 x$. Así pues $D_x(\sec^2 x)=D_x(\tan^2 x)$, sin embargo las funciones no son iguales ($\sec^2 x\neq\tan^2 x$) pero si difieren entre ellas en una cantidad constante, ya que $\sec^2 x-\tan^2 x=1$.

Una proposición equivalente a (4), que se utiliza en ocasiones en textos de ciencias básicas y de la ingeniería, es la siguiente:

Si dos funciones dadas son iguales, dos primitivas de ellas cualesquiera, difieren entre sí por una constante: $$f(x)=g(x) \implies \int f(x)\,dx=\int g(x)\,dx+C$$	(5)

Para terminar con este punto, referente a la diferenciación y la integración como operaciones inversas, consideraremos las siguientes proposiciones:

$$D\int F(x)\,dx=F(x)$$	(6)

y:

$$\int dF(x)=F(x)+C$$	(7)

[1] Es debido a la constante que se habla de la integral *indefinida*, ya que el valor de la función obtenida no está plenamente definido mientras no se halle *el* valor requerido de la constante de manera que se satisfaga alguna *condición particular*.

[2] Por eso es que podemos hablar de *la* derivada de una función, pero no de la primitiva, sino de *una* primitiva de una función.

La validez de estas igualdades es relativamente fácil de probar. Si G es una primitiva de F, entonces $D\int F(x)\,dx = D(G(x)+C) = G'(x) = F(x)$. Por otra parte, tenemos que $\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C$.

2. CÁLCULO DE PRIMITIVAS

Los párrafos anteriores nos permiten afirmar que, la operación de integración consiste en obtener una primitiva de la función integrando. Así pues, vamos a considerar, ahora, algunas técnicas para el cálculo de una primitiva de una función dada, comenzando con el caso en que el integrando pueda identificarse en una tabla y, posteriormente, se verán algunos procesos que se utilizarán para ciertos tipos de integrando.

Se han incluido sólo algunos ejemplos porque, en el momento que se lo requiera, las primitivas podrán obtenerse mediante algún programa de manipulación simbólica, como geogebra, e incluso, como aquellos con los que cuentan algunas calculadoras.

Propiedades de linealidad. Antes de atender las técnicas para el cálculo de primitivas, debemos considerar dos propiedades básicas de la operación de integración, las cuales son llamadas propiedades de linealidad y que se pueden enunciar como sigue:

(a) La integral del producto de una constante y una función es igual al producto de la constante y la integral de la función. Es decir:

$$\int c\, f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \tag{8}$$

(b) La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de las funciones. Es decir:

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \tag{9}$$

Para probar estas proposiciones consideremos dos funciones ϕ y γ, que sean primitivas de f y g, respectivamente, de manera que $\phi'(x) = f(x)$ y $\gamma'(x) = g(x)$, así que:

$$\int f(x)\,dx = \phi(x) + C_1 \quad \text{y} \quad \int g(x)\,dx = \gamma(x) + C_2$$

Bajo este supuesto tenemos que:

$$D_x[c\,\phi(x)] = c\,D_x\phi(x) = c\,\phi'(x) = c\,f(x)$$

Así que:

$$\int cf(x)\,dx = c\phi(x) = c\left[\int f(x)\,dx - C_1\right] = c\int f(x)\,dx + C \qquad \text{(a)}$$

(Con $C = -c\,C_1$)

Por otra parte:

$$D_x[\phi(x)+\gamma(x)] = \phi'(x) + \gamma'(x) = f(x) + g(x)$$

Por lo tanto:

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = [\phi(x) + \gamma(x)] + C_3 = \phi(x) + \gamma(x) + C_3$$
$$= [\int f(x)\, dx - C_1] + [\int g(x)\, dx - C_2] + C_3$$
$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx + C \qquad \text{(b)}$$
$$\text{(Con } C = -C_1 - C_2 + C_3\text{)}$$

Ahora bien, debido a que, al calcular las integrales, es decir, al obtener las primitivas, se debe incluir la constante de integración, no resulta necesario indicar la constante C que aparece en las ecuaciones (a) y (b), por lo que estas generalmente se escriben como (8) y (9).

Integrales elementales. Utilizando las reglas o teoremas de diferenciación podemos obtener las correspondientes fórmulas de integración.

Por ejemplo, sabemos que $d(\text{sen}\, u) = \cos u$, por lo tanto:

$$\int \cos u\, du = \int d(\text{sen}\, u) = \text{sen}\, u + C \qquad \text{(c)}$$

Donde *u* es una función de otra variable, esto es, de la variable independiente.

Por ejemplo, si queremos calcular $\int x \cos(3x^2)\, dx$, al comparar con (8c) vemos que, si $u = 3x^2$, entonces $du = 6x\, dx$. Así pues, recurriendo a la propiedad de linealidad 8, multiplicando y dividiendo el integrando por 6, obtenemos que:

$$\int x \cos(3x^2)\, dx = \int \frac{1}{6}(6x) \cos(3x^2)\, dx = \frac{1}{6} \int \cos(3x^2)\,(6x dx) = \frac{1}{6} \text{sen}\,(3x^2) + C$$

De igual manera podemos obtener fórmulas similares a (c), a las que denominaremos formas *elementales*, las cuales pueden encontrarse en cualquier libro o manual que contenga tablas de integrales. En este documento las encontramos al final del texto. Una de ellas, que aparecerá con frecuencia, es la de la potencia de una función:

$$\int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c, \qquad n \neq -1 \qquad \text{(d)}$$

Resulta muy importante, aquí, tener en mente (o muy a la mano) las reglas de la derivación, ya que debemos reconocer en du, la diferencial de la función que aparece como base en la potencia. Por ejemplo:

$$\int \frac{\cos 2x\, dx}{\text{sen}^3 2x}$$

Si reconocemos que $\cos 2x$ es parte de la derivada de $\text{sen}\, 2x$, tenemos que $d\,(\text{sen}\, 2x) = 2 \cos 2x\, dx$, así que, recurriendo nuevamente la propiedad de linealidad (8) podemos escribir:

$$\int \frac{\cos 2x\, dx}{\text{sen}^3 2x} = \int (\text{sen}\, 2x)^{-3}\,(2 \cos 2x\, dx)\, \left(\frac{1}{2}\right)$$

Ahora aplicamos y aplicamos la fórmula (d), con $u = \text{sen}\, 2x$ y $n = -3$:

$$\int \frac{\cos 2x\, dx}{\text{sen}^3 2x} = \frac{1}{2} \int (\text{sen}\, 2x)^{-3}\,(2 \cos 2x\, dx) = \frac{1}{2} \frac{1}{-2} (\text{sen}\, 2x)^{-2} + c$$
$$\int \frac{\cos 2x\, dx}{\text{sen}^3 2x} = -\frac{1}{4} (\text{sen}\, 2x)^{-2} + c = -\frac{1}{4\, \text{sen}^2 2x} + c$$

Integración de (algunas) funciones racionales. Sabemos que todo polinomio se puede factorizar de manera tal que cada uno de sus factores sea lineal o cuadrático. Por otra parte, también sabemos que toda función racional impropia puede expresarse como la suma de un polinomio y una fracción propia, y que esta fracción propia puede a su vez expresarse como la suma de fracciones *parciales* con denominador lineal o cuadrático.

De esta manera, el cálculo de una primitiva de una función racional dada se reduce a la aplicación de técnicas algebraicas, como la de factorización (que puede a su vez requerir de la búsqueda de raíces), la división de polinomios y la descomposición en fracciones parciales. En textos de álgebra puede encontrarse la información correspondiente a esas técnicas, aquí sólo indicaremos cómo se emplean en el cálculo de primitivas.

Supóngase, por ejemplo, que deseamos calcular $\int \frac{x+1}{x^3-x^2}dx$. Así pues, la fracción del integrando es propia y se puede descomponer en fracciones parciales:

$$\frac{x+1}{x^3-x^2} = \frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)}$$

Así que:

$$x + 1 \equiv Ax^2 - Ax + Bx - B + Cx^2 \equiv (A + C)x^2 + (B - A)x - B$$

De donde: $A + C = 0$, $B - A = 1$ y $-B = 1$

Por lo tanto $B = -1$, $A = -2$ y $C = 2$, así que:

$$\int \frac{x+1}{x^3-x^2}dx = \int \frac{-2}{x}dx + \int \frac{-1}{x^2}dx + \int \frac{2}{x-1}dx$$

$$\int \frac{x+1}{x^3-x^2}dx = -2\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + C$$

O bien, aplicando propiedades de los logaritmos:

$$\int \frac{x+1}{x^3-x^2}dx = \frac{1}{x} + \ln\frac{(x-1)^2}{x^2} + C$$

Consideremos ahora una función impropia, por ejemplo supongamos que deseamos calcular $\int \frac{x^3+x^2+1}{x+1}dx$.

En este caso aplicamos el algoritmo de la división para obtener el cociente y el residuo que resultan al dividir $x^3 + x^2 + 1$ entre $x + 1$. Al hacerlo obtenemos $\frac{x^3+x^2+1}{x+1} = x^2 + \frac{1}{x+1}$ y, por lo tanto:

$$\int \frac{x^3+x^2+1}{x+1}dx = \int x^2\,dx + \int \frac{1}{x+1}dx = \frac{1}{3}x^3 + \ln|x+1| + C$$

Integración de (algunas) funciones irracionales. Cuando el integrando es una función lineal encontraremos fácilmente la primitiva, si en cambio es una función cuadrática es posible que tenga que hacerse algún ajuste para expresar el radical de manera que corresponda a una de las incluidas en la tabla. Por ejemplo supongamos que deseamos calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x+1}}$.

Observando el radicando veremos que, aparentemente, no corresponde a una de las formas contenidas en la tabla. Sin embargo, al completar el cuadrado en el radicando obtenemos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2(x^2-2x)+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2(x^2-2x+1)-1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2(x-1)^2-1}}$$

Ahora sí podemos completar la forma correspondiente a $\sqrt{u^2-a^2}$ en el denominador, con du en el numerador:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left[\sqrt{2}(x-1)\right]^2-1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}dx}{\sqrt{\left[\sqrt{2}(x-1)\right]^2-1^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}(x-1)+\sqrt{2x^2-4x+1}\right| + c$$

Integración por partes. Integrar una suma de funciones resulta tan simple, o complicado, como integrar cada uno de sus términos, ya que, de acuerdo con la propiedad de linealidad (9) la integral de una suma es la suma de las integrales. Sin embargo, cuando el integrando es un producto, no podemos hacer lo mismo, ya que la derivada de un producto no es igual al producto de las derivadas de los factores.

Podemos, sin embargo, partir de la regla para la diferenciación de un producto, para obtener lo que se conoce como fórmula de *integración por partes*, la cual resultará especialmente útil cuando el integrando sea un producto de funciones. Para ello consideremos que:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du, \qquad u\,dv = d(uv) - v\,du$$

De donde, de acuerdo con (6.4), (6.9), y (6.6), tenemos que:

$$\int u\,dv = \int [d(uv) - v\,du] + C_1 = \int d(uv) - \int v\,du + C_2$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du + C_3$$

Podemos eliminar la constante en esta fórmula, siempre y cuando recordemos ponerla al calcular la integral del lado derecho. De esta manera, la fórmula de la integración por partes generalmente se escribe como:

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$	(6.10)

Cabe mencionar aquí, que resulta conveniente utilizar esta igualdad siempre que la integral de $v\,du$ sea más fácil de calcular que la de $u\,dv$, o bien cuando, al aplicarse repetidas veces, se pueda calcular la integral buscada mediante un procedimiento algebraico. Por otra parte, dada una función integrando en forma de producto, es posible identificar los factores en más de una forma, por lo que en ocasiones será necesario probar varias opciones antes de tener éxito.

Veamos un primer ejemplo, en el que el integrando es el producto de dos funciones trascendentes, ambas con derivadas cíclicas:

$$I = \int e^{2x} \cos 3x \; dx$$

Debido a que ambas funciones (exponencial y coseno) tienen derivada cíclica, parece que daría lo mismo cuál de ellas identificamos con u y cuál con dv. Probemos con:

$$u = e^{2x} \qquad \text{y} \qquad dv = \cos 3x \ dx$$

De manera que:

$$du = 2\, e^{2x} dx \qquad \text{y} \qquad v = \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x$$

Al sustituir en (10) obtenemos:

$$I = \int e^{2x} \cos 3x \ dx = \frac{1}{3}\, e^{2x} \operatorname{sen} 3x - \frac{2}{3} \int e^{2x} \operatorname{sen} 3x \ dx$$

Al parecer no hemos ganado nada, ya que la nueva integral es similar a la propuesta. Sin embargo, al aplicar nuevamente la integración por partes, con $u = e^{2x}$ y $dv = \operatorname{sen} 3x\, dx$ obtenemos $du = 2\, e^{2x} dx$ y $v = -\frac{1}{3} \cos 3x \ dx$, así que:

$$I = \int e^{2x} \cos 3x \ dx = \frac{1}{3}\, e^{2x} \operatorname{sen} 3x - \frac{2}{3} \left[-\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cos 3x \ dx \right]$$

Observamos ahora que la integral que aparece al final es aquella que deseamos calcular. Escribimos entonces:

$$I = \frac{1}{3}\, e^{2x} \operatorname{sen} 3x + \frac{2}{9}\, e^{2x} \cos 3x - \frac{4}{9}\, I$$

Así que sólo hay que despejar *I*:

$$I + \frac{4}{9} I = \frac{1}{3}\, e^{2x} \operatorname{sen} 3x + \frac{2}{9}\, e^{2x} \cos 3x,$$

$$\frac{13}{9} I = \frac{1}{3}\, e^{2x} \operatorname{sen} 3x + \frac{2}{9}\, e^{2x} \cos 3x,$$

$$I = \frac{9}{13} \left[\frac{1}{3}\, e^{2x} \operatorname{sen} 3x + \frac{2}{9}\, e^{2x} \cos 3x \right] = \frac{3}{13}\, e^{2x} \operatorname{sen} 3x + \frac{2}{13}\, e^{2x} \cos 3x + c$$

Cuando el integrando es el producto de una potencia de la variable y una función trascendente (con derivada cíclica), es una regla prácticamente general elegir la potencia como u y la función trascendente como dv, de manera que, al hacer la integración por partes, la nueva integral tenga otro producto en el que el exponente de la potencia se ha degradado en la unidad. Al aplicar esto repetidas veces se llega a una integral cuyo integrando es sólo la función trascendente y podremos calcularla con una tabla.

Sin embargo, cuando la derivada no es cíclica, es probable que la elección correcta sea al contrario. Como ejemplo vamos a calcular $\int x^3 \ln x\, dx$.

Si se elige $u = x^3$ y $dv = \ln x$ nos enfrentamos con el problema de encontrar una primitiva de $\ln x$. Si, en cambio se elige $u = \ln x$ y $dv = x^3$, tendremos entonces que $du = \frac{1}{x}$ y $v = \frac{x^4}{4}$, y al sustituir en (10) se obtiene:

$$\int x^3 \ln x\, dx = (\ln x) \left(\frac{x^4}{4} \right) - \int \left(\frac{x^4}{4} \right) \frac{dx}{x} = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{1}{4} \int x^3 dx$$

$$\int x^3 \ln x\, dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{x^4}{4} \right) + C = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C$$

Integración por cambio de variable. Supóngase que se desea calcular:

$$\int f(x)\,dx \qquad \text{(e)}$$

Supongamos ahora que se introduce el cambio de variable (*w* en lugar de *x*) definido por:

$$x = \phi(w) \qquad \text{(f)}$$

De esta manera $dx = \phi'(w)dw$, y al sustituir en (e), tenemos que:

$$\int f(x)\,dx = \int f[\phi(w)]\,\phi'^{(w)}dw = \int g(w)\,dw = G(w) \qquad \text{(g)}$$

Donde G es una primitiva de g.

Así pues, si nos parece más fácil obtener una primitiva de g que de f, un cambio de variable como (f) resulta conveniente. Ahora bien, la primitiva buscada debe ser una función de la variable dada x, mientras que al integrar $g(w)$ obtenemos una función en una nueva variable w.

$$\begin{tikzcd}
\int f(x)\,dx \arrow[r, "(1)"] \arrow[d] & F(x) + C \\
x = \phi(w) \arrow[d, "(2)"] & \arrow[u] \\
\int g(w)\,dw \arrow[r, "(3)"] & G(w) + C \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Figura 1

Para expresar la primitiva obtenida en términos de la variable original debe utilizarse la función inversa de aquella que fue introducida en el cambio de variable. Es decir, si de (f) se despeja w, tendremos:

$$w = \phi^*(x) \qquad \text{(donde } \phi^* \text{ es la función inversa de } \phi\text{)}$$

Si ahora se sustituye en (g), se obtendrá la expresión buscada:

$$\int f(x)\,dx = G(w) = G\big(\phi^*(x)\big)$$

Por lo tanto, para que pueda aplicarse este cambio de variable se requiere que ϕ sea una función inyectiva. El procedimiento antes descrito se muestra mediante el esquema mostrado en la figura 1.

Por ejemplo, supóngase que se desea calcular $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}dx$.

Si buscamos en una tabla de formas elementales de integración, muy probablemente no encontraremos una que corresponda al integrando. Ahora bien, observando que el integrando tendría un “mejor aspecto” si no tuviera el radical, se propone $w = \sqrt{1-x}$ de manera que $w^2 = 1 - x$, $x = 1 - w^2$ y $dx = -2w\,dw$. Al sustituir en la integral propuesta se obtiene:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int \frac{\left(1-w^2\right)^2}{w}(-2w\,dw) = -2\int (1-w^2)^2\,dw$$
$$= 2\int (1-2w^2+w^4)\,dw = -2\left(w - \frac{2}{3}w^3 + \frac{1}{5}w^5\right) + C$$

Finalmente, al sustituir $w$por $\sqrt{1-x}$ para obtener la primitiva obtenida, en términos de la variable original, x, obtenemos la primitiva buscada:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx = -2(1-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} + C$$

Sustituciones trigonométricas. En el caso que el integrando es una función algebraica que contiene radicales de la forma $\sqrt{a^2+u^2}$, $\sqrt{a^2-u^2}$ o $\sqrt{u^2-a^2}$, puede resultar útil un cambio de variable que, recurriendo a una identidad trigonométrica, transforme el integrando en una expresión que no contenga radicales.

Por ejemplo, si en el integrando aparece el radical $\sqrt{a^2+u^2}$, entonces, al hacer $u = a\tan z$ se tendrá:

$$\sqrt{a^2+u^2} = \sqrt{a^2+a^2\tan^2 z} = a\sqrt{1+\tan^2 z} = a\sqrt{\sec^2 z} = a\sec z$$

De esta manera el integrando ya no tendrá un radical, aunque ahora aparece una función trigonométrica, que antes no estaba.

La expresión:	mediante el cambio de variable:	se transforma en:
$\sqrt{a^2+u^2}$	$u = a\tan z$	$a\sec z$
$\sqrt{a^2-u^2}$	$u = a\cos z$	$a\,\text{sen}\,z$
$\sqrt{u^2-a^2}$	$u = a\sec z$	$a\tan z$

Tabla 1

En la tabla 1 se indican, para los tres casos distintos considerados, los cambios de variable requeridos para transformar un integrando con radicales en otro en el que aparecen funciones trigonométricas, pero no radicales.

Por ejemplo, si se desea para calcular $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$, de acuerdo con lo indicado en la tabla, se propone $x = 2\cos w$, de manera que $4 - x^2 = 4 - 4\cos^2 w = 4(1-\cos^2 w) = 4\,\text{sen}^2 w$, y $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4\,\text{sen}^2 w} = 2\,\text{sen}\,w$. Además $dx = -2\,\text{sen}\,w\,dw$, por lo que al sustituir en la integral se obtiene:

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx = \int \frac{2\,\text{sen}\,w}{2\cos w}(-2\,\text{sen}\,w\,dw) = -2\int \frac{\text{sen}^2 w}{\cos w}\,dw = -2\int \frac{1-\cos^2 w}{\cos w}\,dw$$

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx = -2\int \frac{1-\cos^2 w}{\cos w} dw = -2\int \frac{1}{\cos w} dw + 2\int \cos w\, dw$$

$$= -2\int \sec w\, dw + 2\int \cos w\, dw = -2\ln(\sec w + \tan w) + 2\,\mathrm{sen}\, w + C$$

Para expresar esta primitiva en términos de la variable original, x, hay que tomar en cuenta el cambio de variable propuesto $x = 2\cos w$ (o bien $\cos w = \frac{x}{2}$). Esta relación determina un triángulo rectángulo en el que uno de sus ángulos agudos es w, el cateto adyacente a este es x, y la hipotenusa es 2 (figura 2).

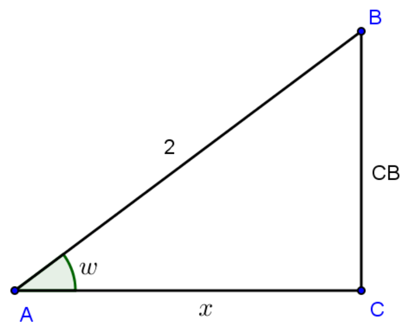

Figura 2

Tenemos entonces, por el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + \mathrm{CB}^2 = 2^2, \qquad \mathrm{CB}^2 = 4 - x^2$$

De manera que $\mathrm{CB} = \sqrt{4-x^2}$ y, por lo tanto:

$$\sec w = \frac{2}{x}, \qquad \tan w = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{sen}\, w = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

Al sustituir en la integral se obtiene:

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx = -2\ln\left(\frac{2}{x} + \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right) + \sqrt{4-x^2} + C$$

Uso de series de potencias. Al igual que en otras circunstancias, el recurso de las series de potencias puede resultar muy útil para el cálculo de una primitiva de una función dada, siempre y cuando se considere que la función (primitiva) obtenida tiene como dominio el intervalo de convergencia de la serie utilizada, o la intersección de los intervalos de las series, en el caso de que se use más de una.

Por ejemplo, si se desea calcular $\int \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ y recurrimos al desarrollo de la función logarítmica, obtendremos:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

Al dividir entre *x* obtenemos:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

De manera que:

$$\int \frac{\ln(1+x)}{x} = \int \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \cdots\right) dx$$

$$\int \frac{\ln(1+x)}{x} = x - \frac{1}{2^2}x^2 + \frac{1}{3^2}x^3 - \frac{1}{4^2}x^4 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

Uso de calculadora y software especializado. Resulta deseable tener un buen dominio de las diferentes técnicas para el cálculo de primitivas, sin embargo, lo que resulta primordial es reconocer que la operación de integración es la inversa de la diferenciación y poder seguir y entender el procedimiento cuando esto se hace en algún texto de ciencias básicas o de la ingeniería.

Así pues, obtener una gran habilidad en el cálculo de primitivas no debe resultar una gran preocupación en el estudiante, y sí lo debe ser, en cambio, el aspecto conceptual.

Un software que resulta de mucha utilidad en el estudio del cálculo, es Geogebra, el cual proporciona la regla de correspondencia de la primitiva con constante cero, así como la gráfica de la misma. Por ejemplo, si f está definida mediante:

$$f(x) = \cos x - x \operatorname{sen} x$$

Entonces tenemos, integrando por partes el segundo término, obtenemos que:

$$\int f(x)\, dx = \int (\cos x - x \operatorname{sen} x) dx = x \cos x + C$$

Así que la función primitiva, correspondiente al valor cero de la constante es:

$$F(x) = x \cos x$$

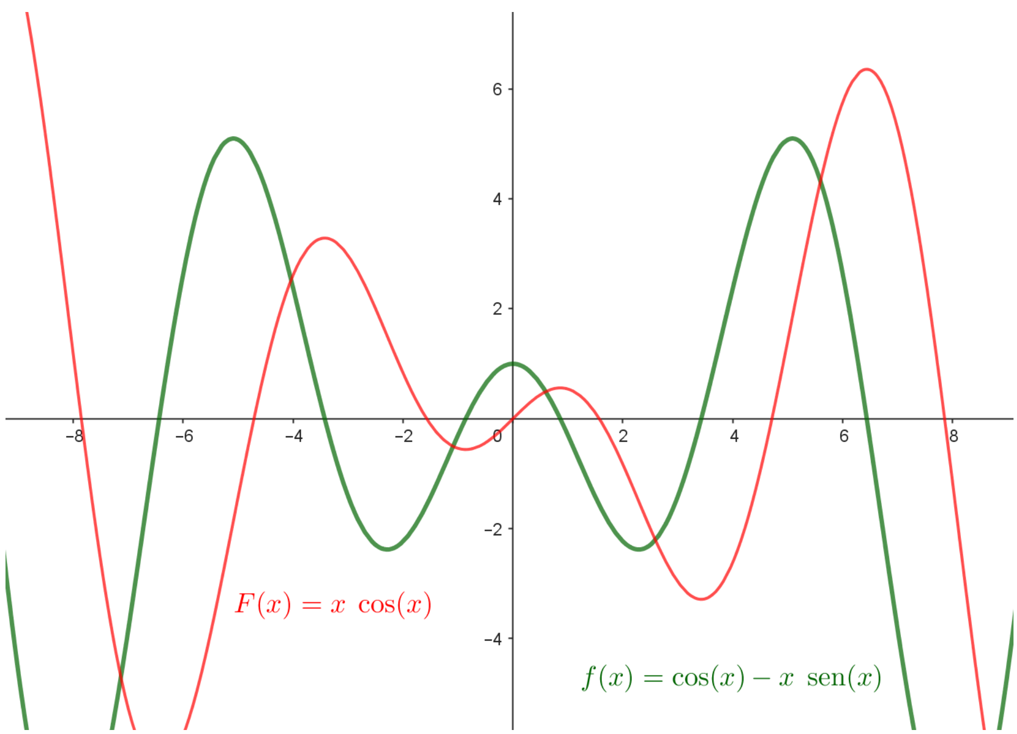

Figura 3

Si usamos geogebra e introducimos la función f (en la entrada algebraica) aparecerá la curva (en color verde) que se muestra en la figura 3.

Si ahora introducimos "Integral[f]", aparecerá la curva en color rojo, que es la gráfica de $F(x) = x\cos x$. Podemos observar que los máximos y mínimos de la curva roja (función primitiva) corresponden a las de la verde (función derivada).