PUNTOS ESTACIONARIOS Y VALORES EXTREMOS

En algunos problemas de interés, en las ciencias de la ingeniería, se tiene la necesidad de encontrar el valor máximo (o mínimo) de alguna de las variables involucradas en el problema. Aquí se atenderá este tipo de problemas, en el caso que la variable que desea maximizar (o minimizar) se puede expresar en términos de otra única variable.

Puntos estacionarios. Sabemos que, si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado, entonces tiene valores extremos en ese intervalo. Si además tiene un máximo en el intervalo, entonces f tendrá que ser creciente antes del punto, y decreciente después del mismo.

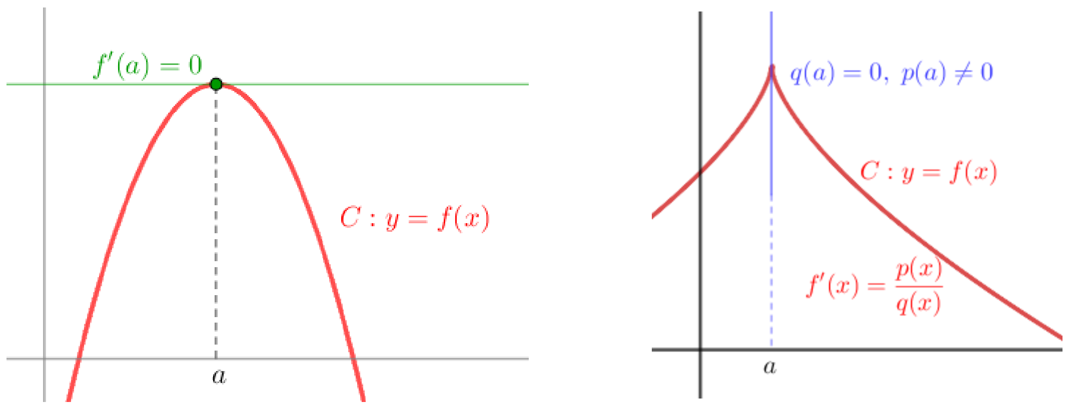


Figura 1

La situación descrita sólo podrá ocurrir en dos formas:

a) *La función es "suave"*. La derivada se anula en el punto, por lo que tiene una tangente horizontal en el punto donde la función tiene el máximo. (figura 1, izquierda).

b) *La gráfica tiene un punto cuspidal* (*pico*) *donde alcanza el máximo*. En este caso la gráfica tiene una tangente vertical en el punto (figura 1, derecha), así que $f'(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ y $q(a) = 0$.

Algo similar puede considerarse para el caso en que una función continua tenga un mínimo en un intervalo. Así pues, tomando en cuenta que en una función continua los valores extremos se dan en aquellos puntos en los que la derivada no existe o donde su recíproco se anula, conviene dar nombre a tales puntos. Llamaremos *números críticos* de una función a aquellos elementos de su dominio en los cuales la derivada o su recíproco se anula. De esta manera, si a es un número crítico de una función f, entonces $f(a, f(a))$ es un punto estacionario o un punto cuspidal de f.

Criterio de la primera derivada. De acuerdo con lo antes dicho, si a es un número crítico de una función f, podemos decir que, si f es creciente antes de a y es decreciente después de *a*, entonces, f tiene un máximo en $x = a$.

En cambio, si f es decreciente antes de a y creciente después de a, entonces f tiene un mínimo en $x = a$. Es decir:

Siendo *a* un número crítico de f, a) Si f' cambia su signo, de "$+$" a "$-$", en $x = a$, entonces f tiene un *máximo* en $x = a$. b) Si f' cambia su signo, de "$-$" a "$+$", en $x = a$, entonces f tiene un *mínimo* en $x = a$. c) Si f' no cambia su signo en $x = a$, entonces f no tiene ni máximo ni mínimo en $x = a$.	(1)

Por ejemplo, si f es la función definida por $f(x) = \frac{8x}{x^2+4}$, observamos, primeramente, que el dominio de la función es el conjunto de todos los números reales, ya que se trata de una función racional cuyo denominador no se anula para ningún valor real de la variable. Además, f es una función racional propia, por lo que tiene como asíntota al eje x.
Ahora bien, al derivar obtenemos:

$$f'(x) = \frac{(x^2+4)8-8x(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{32-8x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{8(4-x^2)}{(x^2+4)^2} = \frac{8(2+x)(2-x)}{(x^2+4)^2}$$

Así que la derivada se anula para $x = -2$ y $x = 2$. Considerando esto examinamos el signo de la derivada en cada uno de los intervalos definidos por estos números, lo cual se muestra en la tabla 5.5.

intervalo	$\langle -\infty, -2\rangle$	$\langle -2,2\rangle$	$\langle 2, \infty\rangle$
signo de f'	$-$	$+$	$+$
comportamiento de *f*	↘	↗	↘

Tabla 1

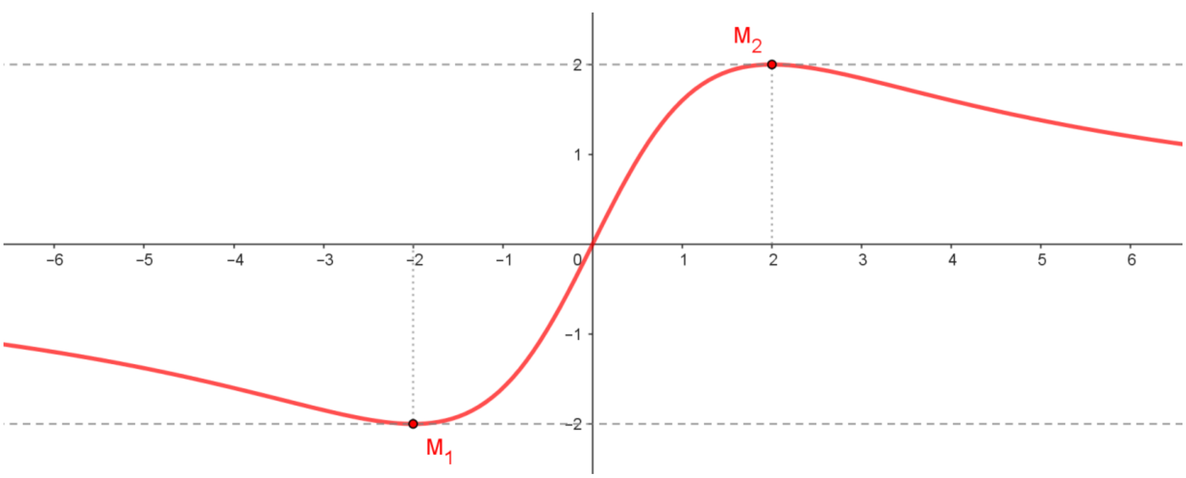


Figura 2

Los resultados indican que la función tiene un mínimo en $x=-2$ y un máximo en $x=2$ y en ambos casos se tiene una tangente horizontal. Con toda esta información, bastará tabular unos cuantos valores positivos de la función (aprovechando la simetría respecto del origen), y trazar la gráfica de la función propuesta. En la figura 2 se muestra dicha gráfica.

intervalo	$\langle -\infty, 0\rangle$	$\langle 0{,}1.5\rangle$	$\langle 1.5, \infty\rangle$
signo de g'	–	–	+
comportamiento de g	↘	↘	↗

Tabla 2

Consideremos ahora la curva cuya ecuación es $y=g(x)=x^4-2x^3$, entonces $g'(x)=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)$, así que la recta tangente a C es horizontal en los puntos en los que $g'(x)=0$, es decir, si $x=0$ y $x=\frac{3}{2}=1.5$.

En la tabla 2 se indica el signo de la derivada en cada uno de los subintervalos definidos por los números críticos obtenidos.

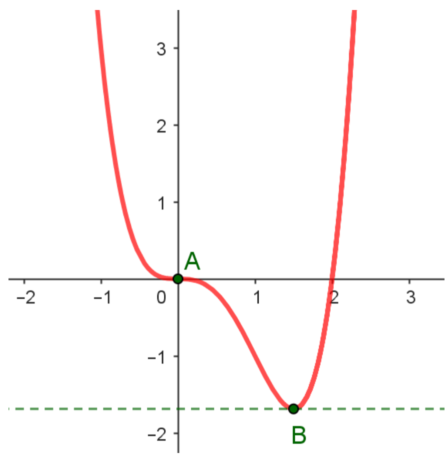


Figura 3

Los resultados mostrados en la tabla nos indican que el punto $\mathrm{A}=\big(0,g(0)\big)=(0{,}0)$ no es ni máximo ni mínimo, ya que la derivada no cambia de signo en el punto. En cambio, la función presenta un mínimo en el punto $\mathrm{B}=\big(1.5,g(1.5)\big)=(1.5{,}1.6875)$, ya que en tal punto la derivada cambia de signo de menos a más, lo cual se observa en la figura 3.

Criterio de la segunda derivada. Sabemos que, en la gráfica de una función con derivada continua, la recta tangente es horizontal en cada punto crítico. Tal situación se puede presentar en alguno de los siguientes casos:

(a) En una porción de la curva que tiene concavidad hacia arriba, en cuyo caso la segunda derivada será positiva y el punto crítico corresponderá a un mínimo de la función (figura 4, izquierda).

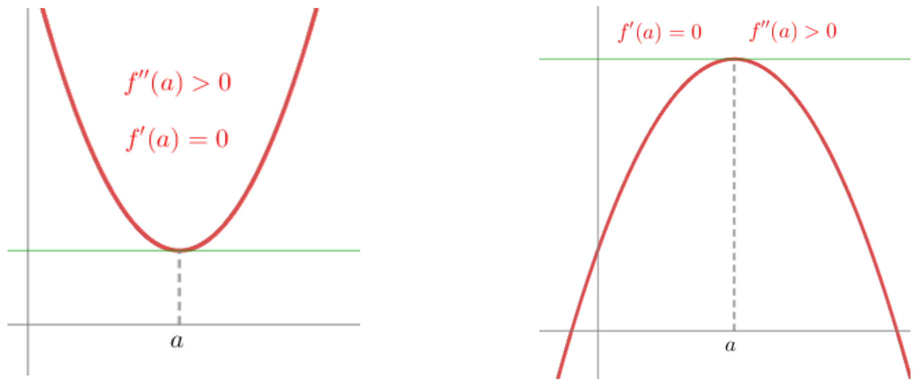


Figura 4

(b) En una porción de la curva que tiene concavidad hacia abajo, en cuyo caso la segunda derivada será negativa y el punto crítico corresponderá a un máximo de la función (figura 4, derecha).

(c) En un punto en el que la concavidad cambia de sentido, es decir, en un punto de inflexión. En este caso la segunda derivada cambia de signo en el punto (figura 5).

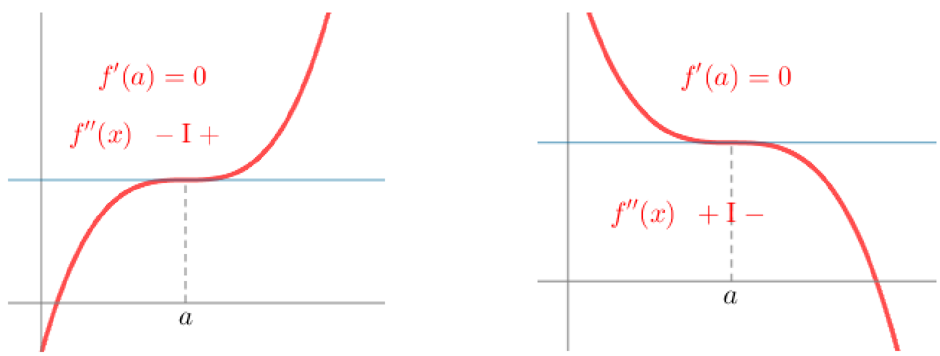


Figura 5

Todo lo anterior nos permite afirmar que:

Sea *f* una función dos veces diferenciable en un intervalo (abierto) que contiene un punto estacionario en $x = a$, de manera que $f'(a) = 0$. Además, si: a) $f''(a) > 0$, entonces *f* tiene un mínimo en $x = a$. b) $f''(a) < 0$, entonces *f* tiene un máximo en $x = a$. c) $f''(a) = 0$, no hay conclusión.	(2)

Esta proposición se conoce como *criterio de la segunda derivada* para la identificación de valores extremos.

En el caso de la función f, definida mediante $f(x)=\frac{8x}{x^2+4}$, de uno de los ejemplos anteriores (figura 2), habíamos obtenido que $f'(x)=\frac{32-8x^2}{(x^2+4)^2}$, de donde se obtuvieron los números críticos $x=-2$ y $x=2$. Al derivar nuevamente se obtiene:

$$f''(x)=\frac{\left(x^2+4\right)^2(-16x)-\left(32-8x^2\right)(2)\left(x^2+4\right)(2x)}{(x^2+4)^4}=\frac{-16x\left(x^2+4\right)-4x\left(32-8x^2\right)}{(x^2+4)^3}$$

$$f''(x)=\frac{16x^3-192x}{(x^2+4)^3}=\frac{16x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}$$

Al evaluar esta función en cada uno de los números críticos se obtiene que $f''(-2)=\frac{16(-2)(4-12)}{(8)^3}>0$ y que $f''(2)=\frac{16(2)(4-12)}{(8)^3}<0$.

Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (2), la función tiene un mínimo en $x=-2$ y un máximo en $x=2$, tal como se había obtenido antes con el criterio de la primera derivada y tal como se observa en la figura 2.

Graficación con ayuda del cálculo diferencial. Resumen

Podemos resumir el proceso para el trazo de la gráfica de una función como se describe a continuación.

1. A partir de la regla de correspondencia de la función dada, obtener la siguiente información:
   a) Dominio.
   b) Intersecciones y simetrías con los ejes coordenados y con el origen.
   c) Discontinuidades: asíntotas verticales, huecos y saltos.
   d) Comportamiento de la función para valores grandes de la variable (asíntotas horizontales, oblicuas y curvas).
2. A partir de la (primera) derivada de la función, obtener:
   a) Puntos críticos.
   b) Intervalos donde la función es creciente o decreciente.
   c) Máximos y mínimos relativos.
   d) Puntos de inflexión con tangente horizontal.
   e) Picos o puntos de quebradura (puntos donde la función es continua pero no diferenciable).
   f) Puntos con tangente vertical (pendiente infinita).
3. A partir de la derivada segunda de la función, obtener:
   a) Intervalos donde la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo.
   b) Máximos y mínimos relativos.
   c) Puntos de inflexión.
4. Hacer una tabulación mínima y trazar la gráfica.

Conviene considerar, además de lo antes señalado, lo siguiente:

- La discontinuidad de salto sólo se considera en caso de que la función esté definida por secciones. Lo mismo ocurre con los puntos de viraje.
- Los máximos y mínimos relativos pueden obtenerse conociendo sólo la primera derivada o utilizando también la segunda derivada, dependiendo del criterio utilizado.
- Las diferentes situaciones que pueden ocurrir cuando se tiene un punto con tangente horizontal se resumen en la tabla 3.
- Las diferentes situaciones que pueden ocurrir cuando se tiene un punto con tangente vertical se resumen en la tabla 4.
- No es necesario obtener toda la información indicada, en cada caso resultará más relevante alguna información que otra. La práctica y el conocimiento previo que se tenga del tipo de función que se desea graficar ayudan a

reconocer cuál es la información que permite hacer el trazo de manera más rápida.

- Para hacer la tabulación, habiendo obtenido la información descrita, basta con incluir, ordenados de manera creciente, los puntos de interés gráfico —es decir, los máximos y mínimos relativos, los puntos de inflexión y los picos—, un punto a la izquierda del menor de éstos, uno a la derecha del mayor, y uno entre cada par de ellos.

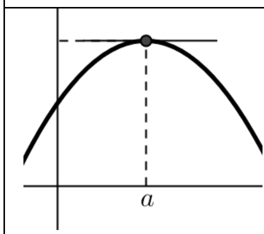
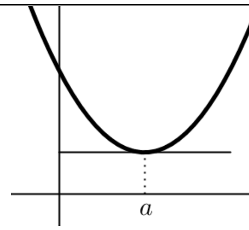
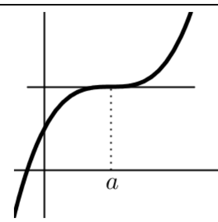
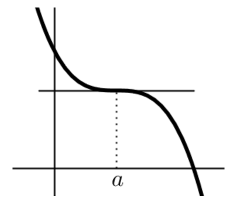
1 máximo	2 mínimo	3 p. de inflexión	4 p. de inflexión
			
$f'(a) = 0$	$f'(a) = 0$	$f'(a) = 0$	$f'(a) = 0$
$f'\ + \mid -$ $f''(a) < 0$	$f'\ - \mid +$ $f''(a) > 0$	$f'\ + \mid +$ $f''(a) = 0$ $f''\ - \mid +$	$f'\ - \mid -$ $f''(a) = 0$ $f''\ + \mid -$

Tabla 3. Tangente horizontal

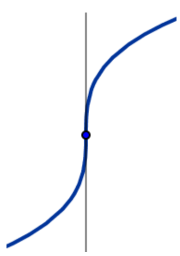
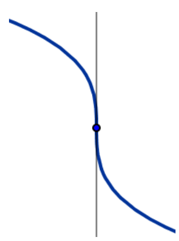
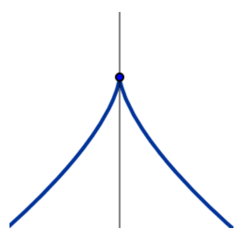
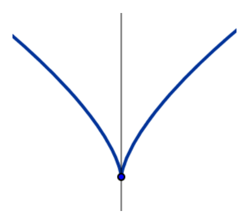
1 p. de inflexión	2 p. de inflexión	3 máximo	4 mínimo
			
$\frac{1}{f'(a)} = 0$	$\frac{1}{f'(a)} = 0$	$\frac{1}{f'(a)} = 0$	$\frac{1}{f'(a)} = 0$
$f'\ + \mid +$ $f''\ + \mid -$ la gráfica de *f* es suave	$f'\ - \mid -$ $f''\ - \mid +$ la gráfica de *f* es suave	$f'\ + \mid -$ $f''\ + \mid +$ la gráfica tiene un pico	$f'\ - \mid +$ $f''\ - \mid -$ la gráfica tiene un pico

Tabla 4. Tangente vertical

Aun si se utiliza calculadora con gráficos o computadora para hacer el trazo, será necesario obtener, con “lápiz y papel”, parte de la información antes indicada, particularmente las ecuaciones de las asíntotas y las coordenadas de los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

Para mostrar cómo se utiliza el resumen anterior, vamos a analizar dos funciones. La primera es el polinomio definido mediante $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$.

Como se trata de un polinomio, es decir, la variable no aparece ni en denominadores ni en radicandos, el dominio es el conjunto de todos los números reales y la gráfica es de una sola pieza. Tampoco presenta asíntotas de ningún tipo.

Al derivar obtenemos:

$$f'(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2)$$

Así que tenemos puntos críticos en $x = -1$ (punto M_1 en la figura 6), $x = 0$ (punto M_2 en la figura) y $x = 2$ (punto M_3 en la figura). En la tabla 5 se indica el signo de la derivada para cada uno de los intervalos definidos por estos números críticos.

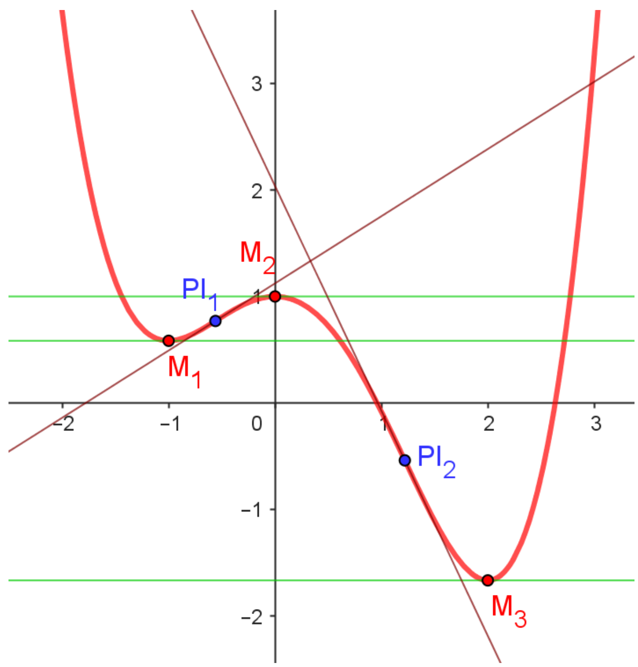


Figura 6

intervalo	$\langle -\infty, -1 \rangle$	$\langle -1, 0 \rangle$	$\langle 0, 2 \rangle$	$\langle 2, \infty \rangle$
signo de f'	–	+	–	+
comportamiento de *f*	↘	↗	↘	↗

Tabla 5

De acuerdo con estos resultados podemos concluir que la función tiene un mínimo en $x = -1$, un máximo en $x = 0$ y un mínimo en $x = 2$. Por otra parte, al calcular la segunda derivada se obtiene $f''(x) = 3x^2 - 2x - 2$, así que $f''(x) = 0$, si:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{6}$$

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{28}}{6} \cong -0.56 \text{ y } \qquad x_2 = \frac{2+\sqrt{28}}{6} \cong 1.22$$

intervalo	$\langle -\infty, x_1 \rangle$	$\langle x_1, x_2 \rangle$	$\langle x_2, \infty \rangle$
Signo de f''	+	–	+
Concavidad de *f*	∪	∩	∪

Tabla 6

En la tabla 6 se indican los signos de la segunda derivada en cada uno de los intervalos determinados por estos dos números. Vemos que la gráfica de f es cóncava hacia arriba en el primer intervalo, luego hacia abajo en el segundo, y termina siendo cóncava hacia abajo en el tercero. Por lo tanto, la curva tiene puntos de inflexión en $x_1 = \frac{2-\sqrt{28}}{6} \cong -0.56$ (punto I_1 en la figura) y $x_2 = \frac{2+\sqrt{28}}{6} \cong 1.22$ (punto I_2 en la figura).

Como segundo ejemplo, consideremos función racional definida mediante:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x - 2}{5x - 5}$$

En este caso observamos, primeramente, que el denominador se anula para $x = 1$ y que, para ese valor de la variable, el numerador es diferente de cero, así que la gráfica tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

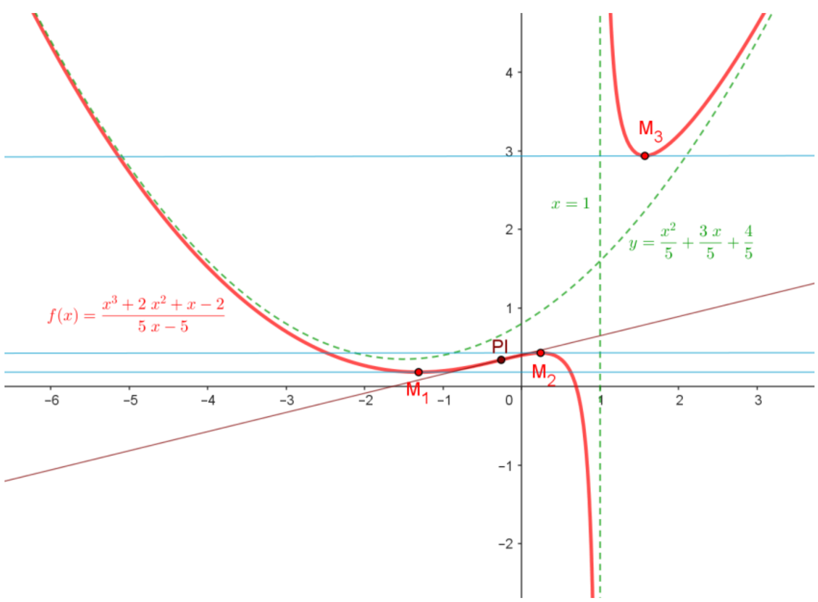


Figura 7

Por otra parte, como se trata de una función racional impropia, hacemos la división, obteniendo como cociente al polinomio cuadrático $Q(x)=\frac{1}{5}x^2+\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}$ y como residuo al número 2. Entonces podemos escribir:

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2+x-2}{5x-5}=\frac{1}{5}x^2+\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}+\frac{2}{5x-5}$$

Así que la gráfica tiene como asíntota a la parábola $y=\frac{1}{5}x^2+\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}$.

Derivando obtenemos que $f'(x)=\frac{2x^3-x^2-4x+1}{5\,(x-1)^2}$, y al resolver numéricamente la ecuación $2x^3-x^2-4x+1=0$ obtenemos los números críticos $x_1\cong-1.313$ (abscisa del punto M_1 en la figura 7), $x_2\cong 0.242$ (abscisa de M_2) y $x_3\cong 1.571$ (abscisa de M_3).

Al derivar nuevamente se obtiene $f''(x)=\frac{2\,(x^3-3x^2+3x+1)}{5\,(x-1)^3}$ y al resolver numéricamente la ecuación $x^3-3x^2+3x+1=0$ se obtiene la única raíz real $x_i\cong-0.26$, que es la abscisa de PI en la figura.

Se aplica ahora el criterio de la segunda derivada para obtener que M_1 es un mínimo, M_2 es un máximo y M_3 es un mínimo. Finalmente se obtiene que la segunda derivada cambia de signo en x_i, por lo que I_1 es un punto de inflexión. Una breve tabulación nos permite hacer la gráfica como se muestra en la figura.