GRAFICACIÓN CON AYUDA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

CONCEPTOS BÁSICOS

Anteriormente se han estudiado algunos conceptos que pueden utilizarse para describir gráficamente el comportamiento de la función; por ejemplo, las asíntotas de la función describen el comportamiento de esta para valores grandes de la variable. Ahora vamos a retomar el asunto de la graficación de las funciones, considerando ahora aquella información que se puede obtener a partir de las funciones derivadas, primera y segunda, de la función dada.

Funciones crecientes y funciones decrecientes. Decimos que una función f es *creciente* en un intervalo, si para cualesquiera x_1 y x_2 elementos del intervalo, se tiene que:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \qquad (1)$$

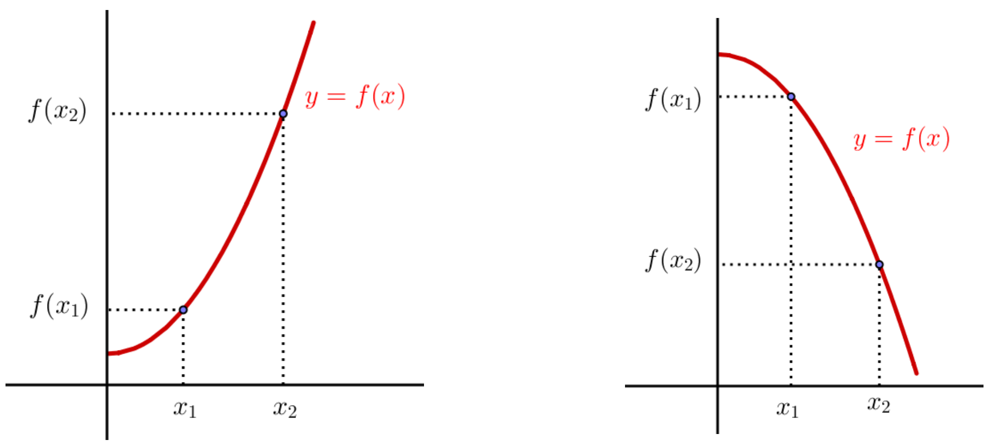

Figura 1

Así pues, una función es creciente en un intervalo si a valores mayores de la variable, corresponden valores mayores de la función (figura 1, izquierda). Análogamente, una función es *decreciente* en un intervalo, si para cualesquiera x_1 y x_2, elementos del intervalo, se cumple la relación:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2) \qquad (2)$$

En otras palabras, la función es decreciente en un intervalo si a valores cada vez mayores de la variable corresponden valores cada vez menores de la función (figura 1, derecha).

Valores extremos. Si f es una función definida en un intervalo I, diremos que f *tiene un valor máximo en* c, elemento de I, si para toda x en el intervalo, se tiene que $f(c) \geq f(x)$. Análogamente, si f es una función definida en un intervalo I, diremos que f *tiene un valor mínimo en* c (con c en I) si $f(c) \leq f(x)$ para toda x en el intervalo. Los valores máximo y mínimo de una función en un intervalo se conocen como *valores extremos* de la función en el intervalo.

Las definiciones anteriores pueden extenderse a todo el dominio de la función, el cual puede ser todo el conjunto de los números reales.

Consideremos los siguientes ejemplos:

a) Sea $f(x) = \operatorname{sen} x, x \in [-2\pi, 2\pi]$ (figura 2), entonces el valor máximo de f es 1, para $x = -\frac{3\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$, mientras que el mínimo es -1, para $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$.

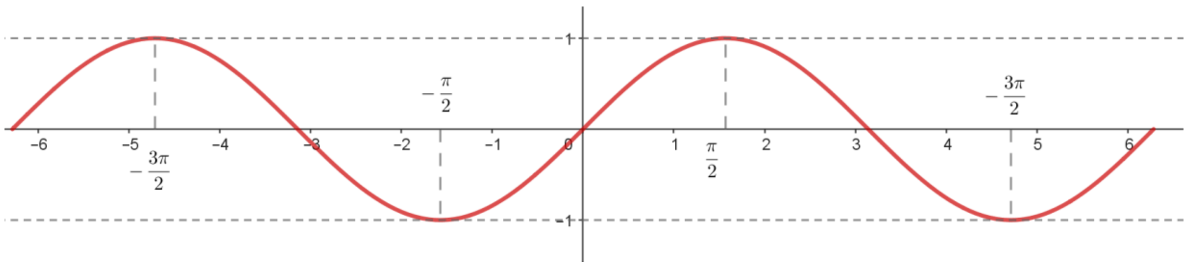

Figura 2

b) Sea $g(x) = e^{-x}$, $x \in [0,1]$ (figura 3), entonces, el valor máximo de g es 1 para $x = 0$, mientras que el mínimo es $e^{-1} = \frac{1}{e}$, para $x = 1$.

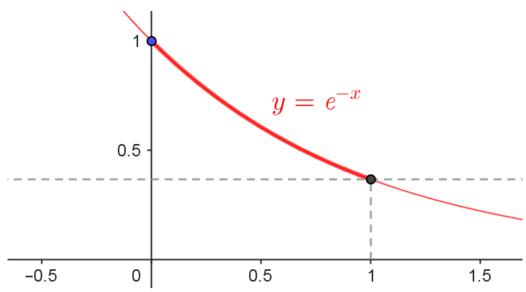

Figura 3

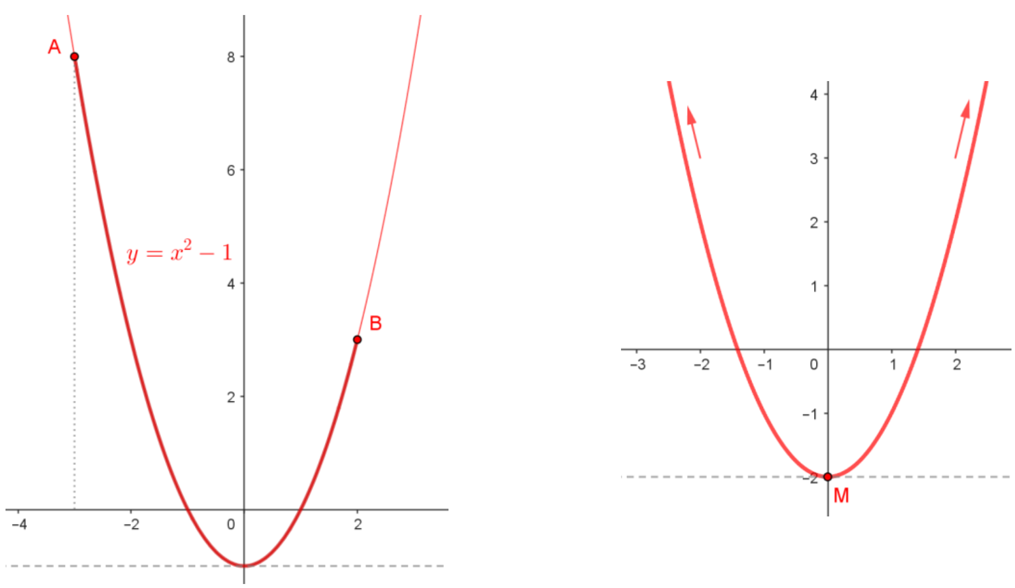

Figura 4

c) Sea $h(x) = x^2 - 1$, $x \in [-3,2]$ (figura 4, izquierda), entonces, el valor máximo de h es 8, para $x = -3$, mientras que el mínimo es -1, para $x = 0$.

d) Sea $H(x) = x^2 - 2$ (figura 4, derecha), entonces, el valor mínimo de H es -2, cuando $x = 0$, pero H no tiene valor máximo en su dominio (todos los números reales).

Los ejemplos anteriores ilustran una proposición que, aunque se puede demostrar, no es un asunto de interés aquí el hacerlo:

Si una función real es continua en un intervalo (cerrado), entonces, tiene valores extremos en ese intervalo.	(3)

Concavidades y puntos de inflexión. En las curvas de la figura 5 se puede observar que la posición de las tangentes respecto de la curva es diferente en cada caso, ya que en la de la izquierda las tangentes están por debajo de la curva, mientras que en la de la derecha están por encima.

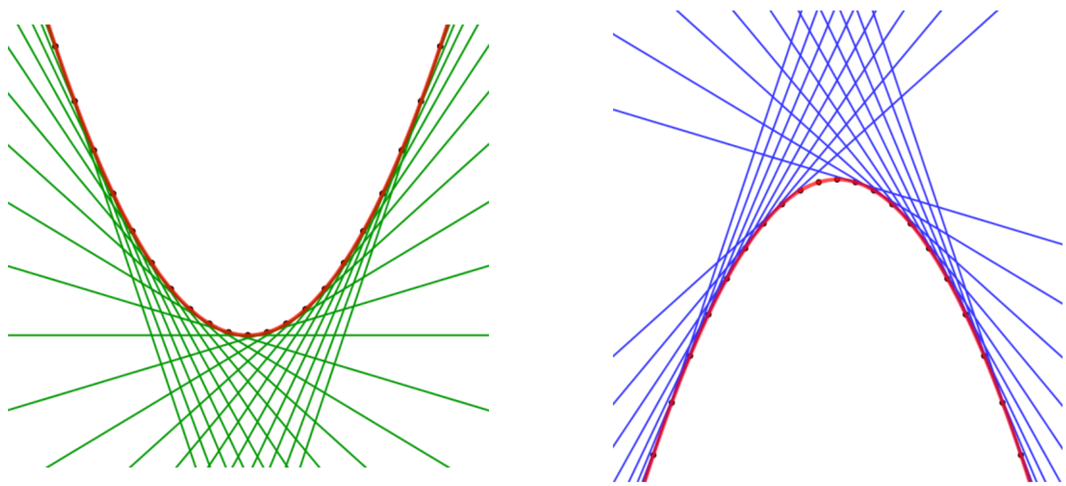

Figura 5

Diremos que la gráfica de una función es *cóncava hacia arriba* (en un intervalo), si las tangentes a la curva (en cada punto del intervalo) se encuentran siempre por debajo de la misma. Análogamente, la gráfica será *cóncava hacia abajo*, si las tangentes se encuentran por encima de la curva. Además, un punto de la curva en el cual ocurre un cambio en el sentido de concavidad de la curva será llamado *punto de inflexión*. En tales puntos la recta tangente cortará la curva, ya que una parte de ella estará por debajo de la curva, y la otra, por encima. Esta situación se ilustra en la figura 6, donde se muestra una curva y un punto P de la curva, pudiendo observar que, a la izquierda del punto las rectas tangentes (trazadas en rojo) se encuentran por encima de la curva mientras que, a su derecha las tangentes (trazadas en verde) se encuentran por debajo de la curva.

Funciones crecientes o decrecientes y signo de la primera derivada. Sabemos que una porción infinitamente pequeña de una curva, definida por $y = f(x)$, alrededor de un punto $\mathrm{P} = (x, f(x))$ de la misma, es también un segmento rectilíneo, específicamente, una porción de la recta tangente a la curva en el punto P.

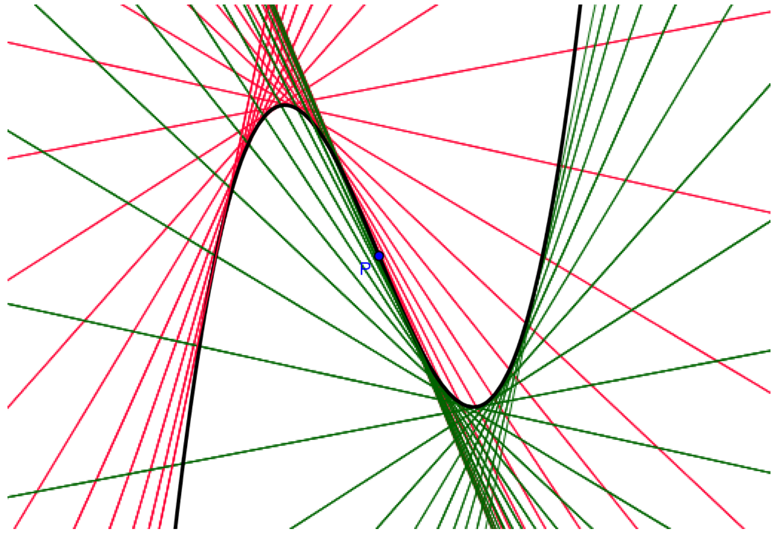

Figura 6

Así pues, una función $y = f(x)$ será creciente en el punto $\mathrm{P} = (x, f(x))$, si $dy = f(x + dx) - f(x) > 0$, como se ilustra en la figura 7 (izquierda).

Además, sabemos que $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$ y que $dx > 0$, ya que "leemos" la gráfica de izquierda a derecha, de manera que, podemos concluir que f es creciente en $\mathrm{P} = (x, f(x))$ si $f'(x) > 0$. Análogamente, podemos decir que f es decreciente en $\mathrm{P} = (x, f(x))$, si $f'(x) < 0$. Lo anterior puede extenderse a un intervalo:

Una función f es *creciente* en un intervalo, si $f'(x) > 0$ para toda x en el intervalo.	(4)
Análogamente, una función f es *decreciente* en un intervalo, si $f'(x) < 0$ para toda x en el intervalo.	(5)

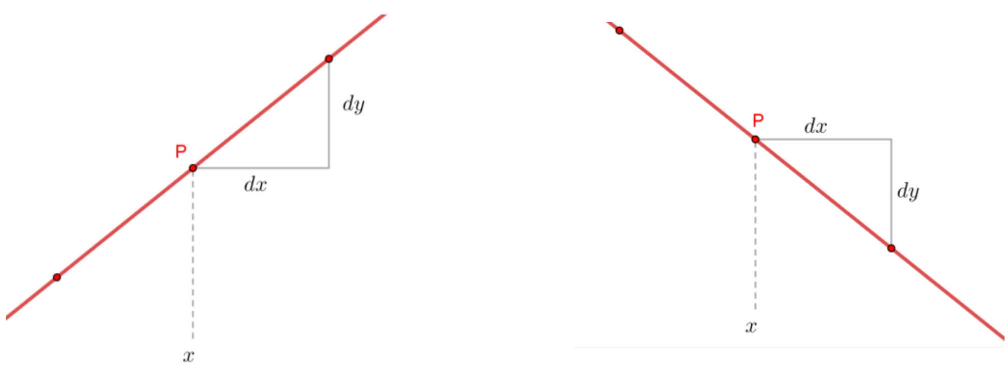

Figura 7

Por ejemplo, si f es la función definida por $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x$, entonces $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}$, así que $f'(x) > 0$, para toda x real, por lo tanto, f es una función creciente desde $-\infty$ hasta ∞, o bien, f es *monótonamente creciente*. La gráfica de esta función es la mostrada en la figura 8 (izquierda), en donde se han trazado porciones de algunas de las rectas tangentes a la curva, observándose que todas estas tienen un ángulo de inclinación agudo.

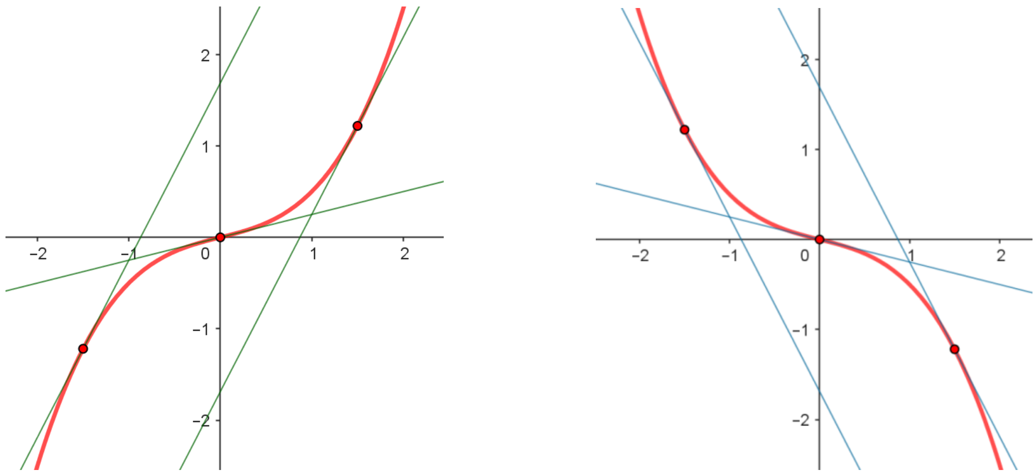

Figura 8

Análogamente, si g está definida por $g(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x$, entonces $g'(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}$, así que $g'(x) < 0$ para toda x real, por lo tanto, g es una función decreciente desde $-\infty$ hasta ∞, o bien, g es *monótonamente decreciente*, y su gráfica es la mostrada en la figura 8 (derecha). En este caso todas las rectas tangentes tienen un ángulo de inclinación obtuso.

Tangente horizontal. La tangente a una curva, definida mediante $y = f(x)$, es horizontal, es decir, paralela al eje de abscisas, en el punto de abscisa a, siempre que $\frac{dy}{dx} = 0$ para $x = a$, es decir, siempre que $f'(a) = 0$.

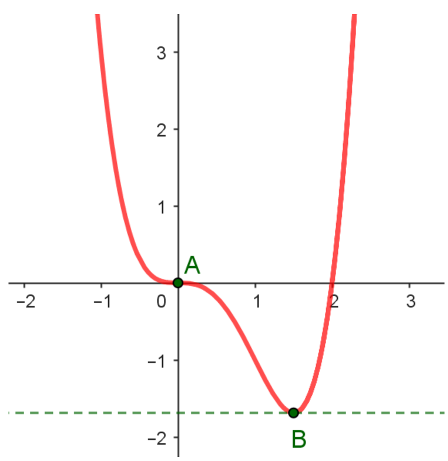

Figura 9

Por ejemplo, si C es la curva cuya ecuación es $y = f(x) = x^4 - 2x^3$, entonces $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3)$, así que la recta tangente a C es horizontal en los puntos en los que $f'(x) = 0$, es decir, si $x = 0$ y $x = \frac{3}{2} = 1.5$, lo cual se ilustra en la figura 9.

En el punto A, de abscisa 0, la tangente es el eje x, la curva es cóncava hacia arriba antes de A y cóncava hacia abajo después del mismo, de manera que A es un punto de inflexión. En el punto B, la recta tangente horizontal se muestra en trazo punteado, la curva es decreciente antes del punto y creciente después del mismo, de manera que la curva tiene un mínimo en B. Más adelante analizaremos ambas situaciones con detalle.

Tangente vertical. Sabemos también que si una curva C está definida por $R(x, y) = 0$, entonces la recta tangente a C es vertical, es decir, paralela al eje de ordenadas, en aquellos puntos en los que $\frac{dx}{dy} = 0$. Ahora bien, si la curva está definida por $y = f(x)$ entonces $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}$, y si además se tiene que $f'(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, entonces la tangente será vertical en aquellos puntos en los que $q(x) = 0$ y $p(x) \neq 0$.

Por ejemplo, si $y = \phi(x) = \sqrt[3]{x+1}$ entonces $\phi'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-2/3} = \frac{1}{3(x+1)^{2/3}}$. Por lo tanto, la tangente a esta curva será vertical si $x + 1 = 0$, es decir, si $x = -1$. La curva definida por la ecuación dada, así como la recta tangente a la misma, en $x = -1$, se muestran en la figura 10.

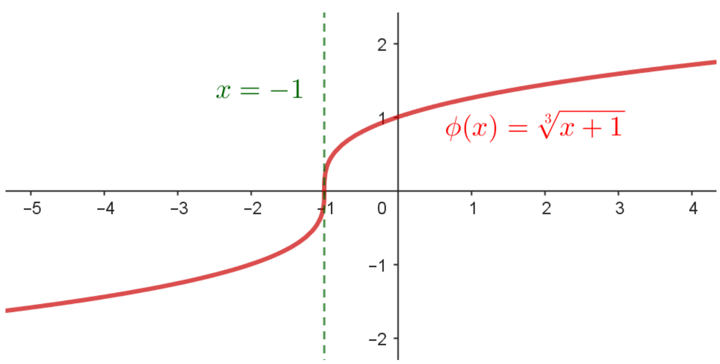

Figura 10

Sabemos que, si una curva se representa por medio de $y = f(x)$, siendo f una función, ninguna recta paralela al eje de ordenadas puede tocar o cortar a la curva más de una vez. Así pues, si una curva se define por medio de $y = f(x)$ e imaginamos que un punto se mueve sobre la curva (de izquierda a derecha), al llegar a un punto en el que la recta tangente es vertical, tendrá que "seguir adelante" (hacia la derecha) y esto sólo ocurrirá en un punto de inflexión, como ocurre en este caso. Aquí, la función es creciente antes del punto con tangente vertical y también creciente después.

Punto cuspidal o vértice. Puede ocurrir, sin embargo, que la curva haga un "rebote" en el punto, produciéndose un vértice o *punto cuspidal*, como ocurre con la curva definida por $y = \sigma(x) = 3x^{2/3} - 2x$

Veamos, en este caso tenemos que $\sigma'(x) = 2x^{-1/3} - 2 = \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} - 2 = \frac{2-2x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2\left(1-x^{\frac{1}{3}}\right)}{x^{\frac{1}{3}}}$.

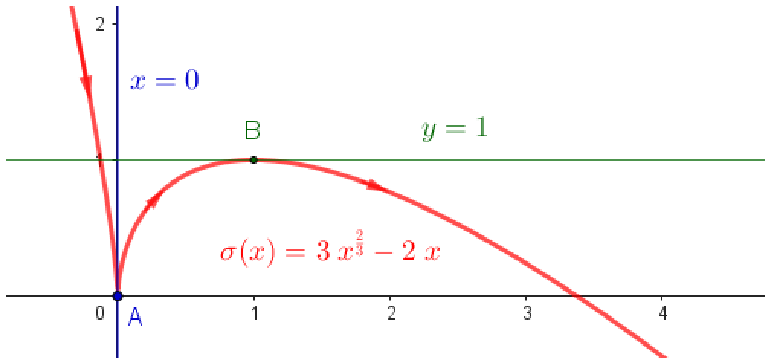

Figura 11

Tenemos entonces que la derivada se anula en $x = 1$, por lo cual sabemos que la gráfica tiene una tangente horizontal en el punto B (figura 11). Por otro lado, el denominador de la expresión para la derivada se anula en $x = 0$, así que la gráfica tiene una tangente vertical en el punto A.

Además, la gráfica de la función tiene un máximo (suave) en B, ya que la derivada cambia su signo de $+$ a $-$. En cambio, en l punto cuspidal A tiene un mínimo, ya que la derivada cambia su signo de $-$ a $+$, todo lo cual se observan en figura.

Signo de la segunda derivada. Concavidades y puntos de inflexión. Consideremos una función f cuya gráfica sea cóncava hacia arriba, en todo un intervalo que contiene a un número a (figura 12, izquierda).

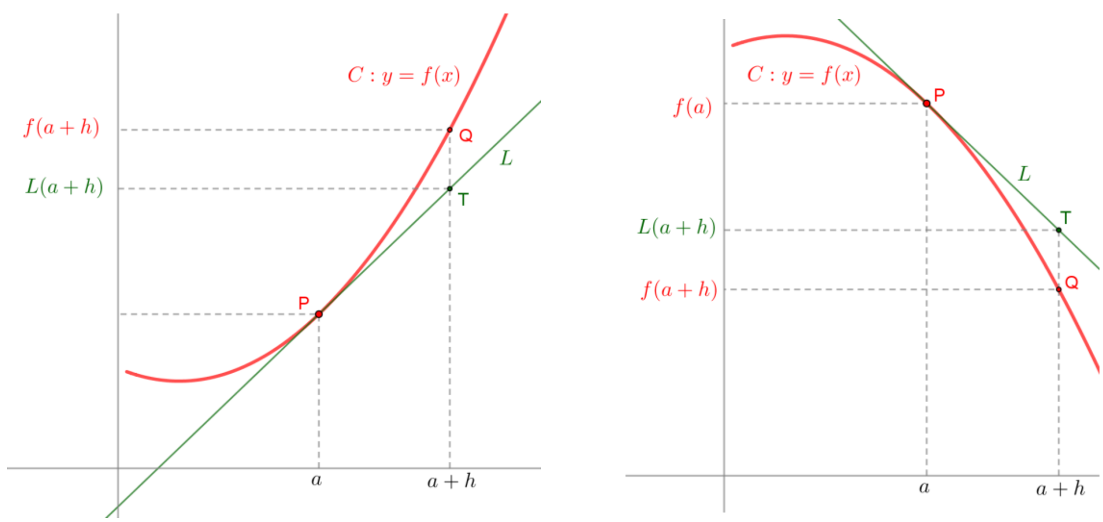

Figura 12

Siendo L la recta tangente a la gráfica de f en $x = a$, su ecuación es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$, de manera que $L(x) - f(a) = f'(a)(x - a)$. Para $x = a + h$, se obtiene:

$$L(x) = L(a+h) = f(a) + f'(a)h \qquad \text{(a)}$$

Por otra parte, el desarrollo de f en serie de Taylor alrededor de a es:

$$f(x) = f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + o(h^3) \qquad \text{(b)}$$

Ahora bien, de acuerdo con la definición de concavidad, lo que debemos obtener es una condición suficiente para que cada uno de los puntos de la tangente, en una vecindad (suficientemente pequeña) del punto de tangencia, estén por debajo del punto correspondiente de la curva, de manera que $L(x) = L(a+h) < f(a+h)$, o bien, $f(a+h) > L(a+h)$. Así pues, si restamos miembro a miembro la ecuación (a) de la (b), obtenemos que:

$$f(a+h) - L(a+h) = \frac{f''(a)}{2}h^2 + o(h^3)$$

Ya que el signo de esta expresión nos indica el sentido de concavidad de la gráfica de f, en las proximidades del punto $\mathrm{P} = (a, f(a))$, y debido a que $h^2 > 0$ para cualquier h no nula, podemos concluir que la gráfica de f es cóncava hacia arriba en una vecindad de P si, y sólo sí $f''(a) > 0$. Análogamente, podemos decir que la gráfica de f es cóncava hacia abajo (figura 12, derecha), en una vecindad de P si, y sólo si $f''(a) < 0$. Extendiendo este resultado a todos los puntos de un intervalo, tenemos que:

La gráfica de una función es cóncava hacia arriba, o hacia abajo, en un intervalo, según su segunda derivada sea positiva o negativa en todo punto del intervalo.	(6)

Ahora bien, si consideramos una función f cuya gráfica sea como la mostrada en la figura 13, tendremos que la parte situada a la izquierda de Q es cóncava hacia abajo, mientras que la situada a su derecha es cóncava hacia arriba (podría ocurrir a la inversa).

Tomando en cuenta que la segunda derivada de esta función es negativa en la parte izquierda, y positiva en la derecha, y suponiéndola continua, deberá existir un punto en que la segunda derivada sea cero y ese punto debe ser aquel en el que la curva cambia su sentido de concavidad, es decir, en el *punto de inflexión*. Suponiendo pues, que la segunda derivada de una función es continua, los puntos de inflexión se localizarán donde la segunda derivada se anula.

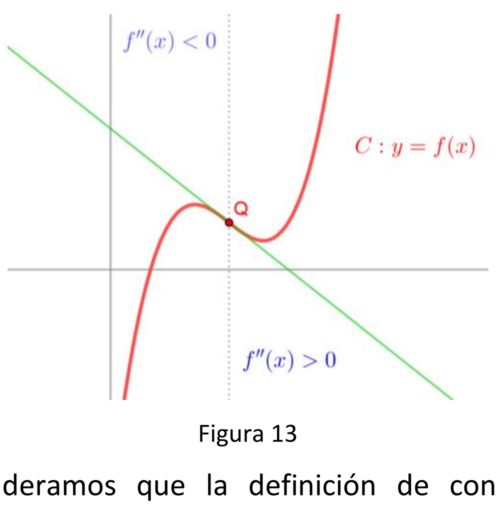

Figura 13

Por otra parte, si consideramos que la definición de concavidad nos indica que, dependiendo del sentido de concavidad, la recta tangente se encuentra por encima o por debajo de la curva, en el caso del punto de inflexión, la recta tangente quedará por encima de la curva, en la parte de la curva que es cóncava hacia abajo, pero por debajo en la otra parte. De esta manera la recta tangente, en un punto de inflexión, cortará a la curva, es decir, pasará de un lado a otro de la misma. Esta situación puede observarse también en la figura 13.

Por ejemplo, consideremos la función definida por $\phi(x) = \frac{8x}{x^2+4}$. Para empezar, observemos que ϕ es impar y continua en $\mathbb{R}$ y que la única intersección de la gráfica con los ejes coordenados es el origen. Además, el eje x es una asíntota de su gráfica, ya que ϕ es una función racional propia.

Por otra parte, al derivar ϕ dos veces, obtenemos:

$$\phi'(x) = \frac{(x^2+4)(8)-8x(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{32-8x^2}{(x^2+4)^2}$$

$$\phi''(x) = \frac{(x^2+4)^2(-16x)-(32-8x^2)(2)(x^2+4)(2x)}{[(x^2+4)^2]^2} = \frac{(x^2+4)^2(-16x)-(128x-32x^3)(x^2+4)}{(x^2+4)^4}$$

$$\phi''(x) = \frac{(x^2+4)(-16x)-(128x-32x^3)}{(x^2+4)^3} = \frac{-16x^3-64x-128x+32x^3}{(x^2+4)^3} = \frac{16x^3-192x}{(x^2+4)^3}$$

$$\phi''(x) = \frac{16x\,(x^2-12)}{(x^2+4)^3} = \frac{16x\,(x+\sqrt{12})(x-\sqrt{12})}{(x^2+4)^3}$$

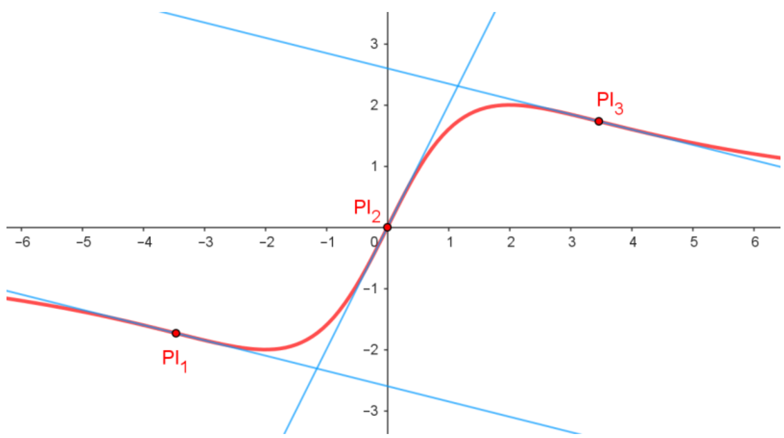

Figura 14

Así pues, la segunda derivada de ϕ es continua en $\mathbb{R}$ y se anula únicamente para $x = -\sqrt{12}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{12}$, por lo que deberá conservar su signo en cada uno de los intervalos:

$$\langle -\infty, -\sqrt{12}\rangle, \quad \langle -\sqrt{12}, 0\rangle, \quad \langle 0, \sqrt{12}\rangle \quad \text{y} \quad \langle \sqrt{12}, \infty\rangle$$

Eligiendo elementos cualesquiera de cada uno de estos intervalos, obtenemos los resultados que se muestran en la tabla 1, a partir de los cuales concluimos que la gráfica de ϕ tiene tres puntos de inflexión: en $x = -\sqrt{12}$, en $x = 0$, y en $x = \sqrt{12}$, tal como se observa en la figura 14.

Intervalo:	$\langle -\infty, -\sqrt{12} \rangle$	$\langle -\sqrt{12}, 0 \rangle$	$\langle 0, \sqrt{12} \rangle$	$\langle \sqrt{12}, \infty \rangle$
Signo de ϕ''	$-$	$+$	$-$	$+$
Concavidad de ϕ	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Tabla 1