

APROXIMACIÓN POLINÓMICA. FUNCIONES TRASCENDENTES

En este documento vamos a considerar el desarrollo en serie de potencias de las principales funciones trascendentes. Cabe recordar que uno de los principales usos del desarrollo en serie de potencias es el de la aproximación de una función por medio de un polinomio.

Ahora bien, tomando en cuenta que el más simple de los polinomios es el de primer grado, comenzaremos nuestro estudio con el caso de la aproximación lineal, la cual resulta ser una herramienta básica en las ciencias básicas y de la ingeniería.

1. APROXIMACIÓN LINEAL

Consideremos una curva C definida por $y = f(x)$, como se muestra en la figura 1. Sea P un punto de la curva y PT una parte de la recta tangente a la curva en el punto P . En términos de movimiento, de acuerdo con las leyes de Newton, si C es la trayectoria de una partícula, y que la fuerza que la obligaba a moverse cesa de actuar cuando la partícula se ubica en el punto P , la partícula continuaría desplazándose por la tangente PT .

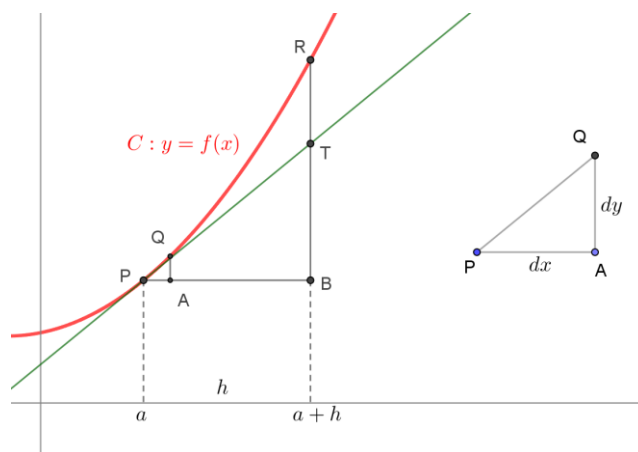


Figura 1

Ahora bien, cuando la partícula se mueve desde P hasta R , la abscisa tiene un incremento $PB = \Delta x$, mientras que el de la ordenada es $BR = \Delta y$. Sin embargo, si la partícula se mueve desde P hasta Q , estando Q infinitamente cerca de P , entonces la abscisa tiene un incremento infinitesimal $PA = dx$ y la ordenada un incremento infinitesimal $AQ = dy$.

Como Q está infinitamente cerca de P , tenemos que Q es un punto que se encuentra tanto en la curva como en la tangente PT . Así pues, por semejanza de triángulos tenemos que $\frac{BT}{PB} = \frac{AQ}{PA}$, de manera que:

$$BT = \frac{AQ}{PA} PB = \frac{dy}{dx} \Delta x = f'(a) \Delta x$$

El segmento BT nos mide el incremento que tiene la función lineal, definido por la recta tangente a la curva en el punto “de partida”, correspondiente al incremento Δx de la variable, a partir de $x = a$.

Denotaremos por δy a tal incremento, al que podemos interpretar como “el incremento que tendría la variable y , cuando la variable x tiene un incremento Δx , a partir de a , si el movimiento tuviera lugar a lo largo de la recta tangente, y no a lo largo de la curva”. Así pues:

$$\delta y = f'(a)\Delta x \quad (1)$$

El incremento real, es decir, el que tiene la variable y , definida mediante $y = f(x)$, es, por supuesto $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a) = BR$.

Si el incremento de la variable es infinitesimal, es decir, si $\Delta x = dx$, tendremos que:

$$\delta y = f'(a)\Delta x = \frac{dy}{dx} dx = dy = dy(a, dx)$$

Este resultado nos indica simplemente que, cuando se tiene un incremento infinitesimal de la variable, el punto sobre la curva “no se despegar” de la recta tangente, por lo que el incremento (de la función) medido sobre la recta tangente será igual al medido sobre la curva; en cambio, si el incremento es pequeño, pero finito, el punto sobre la curva sólo se despegará ligeramente de la tangente, y el valor de $\delta y(a, \Delta x) = BT$ será una aproximación al de $\Delta y(a, \Delta x) = BR$, y la aproximación será mejor en cuanto más pequeño sea el incremento de la variable.

Si f es una función definida mediante $y = f(x)$, y x tiene un incremento “pequeño” Δx, a partir de a, entonces: $\Delta y \cong \delta y$ O bien: $f(a + \Delta x) - f(a) \cong f'(a)\Delta x$ Y también: $\Delta y \cong f'(a)\Delta x$	(2)
---	------------

Por tal razón, llamaremos a δy *aproximación lineal* del incremento de la función y , cuando la variable tiene un incremento Δx .

Observemos, además, que la segunda ecuación también se puede escribir como:

$$f(a + \Delta x) \cong f(a) + f'(a)\Delta x \quad (3)$$

Estas últimas relaciones nos indican la proximidad entre la curva y la recta tangente, cerca del punto de contacto, por lo que las podemos denominar reglas de *aproximación lineal*.

Por ejemplo, si $f(x) = \ln(x + 1)$ y x cambia su valor de 1 a 1.2, es decir, $a = 1$ y $\Delta x = 0.2$, tenemos entonces que:

$$f(a) = \ln 2 \cong 0.693147$$

$$\text{y } f(a + \Delta x) = f(1.2) = \ln 2.2 \cong 0.788457$$

Así que el incremento correspondiente en el valor de la función será:

$$\Delta f(1, 0.2) = f(1.2) - f(1) \cong 0.788457 - 0.693147 \cong 0.09531.$$

Por otra parte:

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \quad \text{y} \quad f'(a) = f'(1) = \frac{1}{2}$$

Así que la aproximación lineal del incremento será $\delta f = \frac{1}{2}(0.2) = 0.1$, y el error relativo, cometido en la aproximación lineal del incremento será:

$$e_r = \left| \frac{0.09531 - 0.1}{0.09531} \right| \cong 4.9\%$$

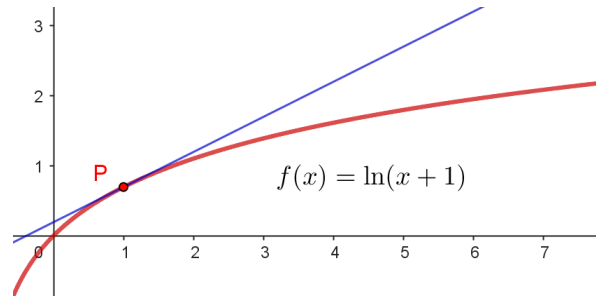


Figura 2

En la figura 2 se muestran la gráfica de f y la recta tangente a la curva en $x = 1$. Puede observarse que, “a la vista”, la recta tangente se confunde con la curva, cerca del punto de tangencia, por la derecha del punto de tangencia, cuando menos hasta $x = 1.2$ ($\Delta x = 0.2$). Sin embargo, aritméticamente, para ese punto se obtiene un error relativo alto (casi 5%).

En la tabla 1 se muestran el valor del incremento de la función (segunda columna), de la aproximación lineal del incremento (tercera columna) y del error relativo cometido en la aproximación lineal (cuarta columna), para algunos valores del incremento de la variable (en la primera columna). Podemos observar que, como cabe esperar, el error es menor en cuanto más cerca estamos del punto de tangencia.

Δx	Δy	δy	e_r
0.2	0.09531	0.1	4.9 %
0.1	0.0487902	0.05	2.5 %
0.01	0.00498754	0.005	0.25 %
0.005	0.00249688	0.0025	0.12 %

Tabla 1

Así pues, para asegurar que la aproximación lineal sea suficientemente buena, se requiere que el incremento de la variable sea suficientemente pequeño, de manera que la curva no se haya despegado demasiado de la tangente.

Ahora bien, el hacer una estimación del valor del cambio en el valor de la función, debido a un cambio en el valor de la variable, nos permite aproximar (predecir) el valor de la función en un punto próximo a aquel en el que tenemos información acerca de la función.

Es decir, si no conocemos la regla de correspondencia de la función, pero tenemos información de la función en $x = a$, específicamente el valor de la función y de su derivada,

podemos estimar el valor de la función en un punto vecino a aquel en el que tenemos la información.

A ver, si conocemos el valor de $f(a)$ y el de $f'(a)$, entonces, para un incremento dado, Δx de la variable, a partir de a , el valor de $f(a + \Delta x)$ podrá estimarse a partir de la ecuación (3), y esperaríamos que la aproximación sea tan buena como pequeño sea el valor de Δx . Por ejemplo, si deseamos estimar el valor de $e^{0.1}$, escogemos a 0.1 como un incremento “suficientemente cercano a 0”, y partimos del conocimiento del valor de la función (y de su derivada) en $x = 0$. Proponemos entonces $f(x) = e^x$, $a = 0$ y $h = 0.1$ y tendremos:

$$e^{0.1} = f(0 + h) \cong f(0) + \delta f = 1 + f'(0) h = 1 + (1) (0.1) = 1.1$$

Al obtener el valor mediante calculadora se lee:

$$e^{0.1} \cong 1.1052$$

Así que el error cometido al utilizar esta aproximación lineal será $\left| \frac{1.1052 - 1.1}{1.1052} \right| \cong 0.5 \%$.

2. SERIE DE TAYLOR

Se ha visto que la aproximación lineal del incremento es mejor en cuanto menor es el incremento de la variable y que la diferencial de una función coincide con su incremento, sólo cuando el incremento de la variable es infinitesimal.

Ahora continuaremos estudiando cómo medir lo mejor posible el cambio en el valor de la función, correspondiente a un determinado cambio en el valor de la variable. Esto que resulta útil, entre otras cosas, para aproximar el valor de la función correspondiente a un valor de la variable que se encuentra “próximo” a otro, sabiendo que, para ese valor de la variable se cuenta con información de la función y sus derivadas sucesivas. A ese valor a de la variable se le llamará valor de referencia, y el punto correspondiente a ese valor $(a, f(a))$ será el punto de referencia.

Así pues, recordemos primeramente que, si una función f está definida mediante $y = f(x)$ y la variable tiene un incremento infinitesimal $dx = h$, entonces $f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, de donde $f(a + h) - f(a) = f'(a)h$.

Por otro lado, sabemos que, siendo $f'(a)h$ un infinitesimal, del orden de h , podemos escribir $f(a + h) - f(a) = f'(a)h + o(h^2)$, o bien $f(a + h) = f(a) + f'(a)h + o(h^2)$.

Pero esta última ecuación nos permite suponer la existencia de constantes reales (finitas o nulas) k_2, k_3, k_4 , etcétera, tales que:

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + k_2h^2 + k_3h^3 + k_4h^4 + \cdots + k_nh^n + o(h^{n+1}) \quad (a)$$

Ahora, como se tiene información de la función en a , haciendo $x = a + h$ vamos a manejar al incremento h como variable y, enseguida, vamos a derivar sucesivamente ambos lados de esta última ecuación, respecto de h :

$$f'(a + h) = f'(a) + 2k_2h + 3k_3h^2 + 4k_4h^3 + \cdots + nk_nh^{n-1} + o(h^n)$$

$$f''(a + h) = 2k_2 + 3 \cdot 2k_3h + 4 \cdot 3k_4h^2 + \cdots + n(n-1)k_nh^{n-2} + o(h^{n-1})$$

$$f'''(a+h) = 3 \cdot 2k_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2k_4h + \dots + n(n-1)(n-2)k_nh^{n-3} + o(h^{n-2})$$

$$f^{iv}(a+h) = 4 \cdot 3 \cdot 2k_4 + \dots + n(n-1)(n-2)(n-3)k_nh^{n-4} + o(h^{n-3})$$

⋮

$$f^{(n)}(a+h) = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2 k_n = n! k_n + o(h)$$

Cuando $h = 0$ tendremos que:

$$f''(a) = 2k_2, \quad f'''(a) = 3 \cdot 2 k_3, \quad f^{iv}(a) = 4 \cdot 3 \cdot 2 k_4, \dots$$

$$f^{(n)}(a) = n! k_n$$

De donde podemos obtener el valor de cada constante:

$$k_2 = \frac{f''(a)}{2} = \frac{f''(a)}{2!}, \quad k_3 = \frac{f'''(a)}{3 \cdot 2} = \frac{f'''(a)}{3!}, \dots, k_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Al sustituir en (a), obtenemos:

$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \dots$	(4)
--	-----

Como ha ocurrido con otros desarrollos en serie, esta ecuación nos da una aproximación de $f(a+h)$, y, por lo tanto, del incremento $\Delta f(a, h) = f(a+h) - f(a)$, con un error tan pequeño como se desee, a condición de incluir cada vez más términos, lo cual depende de qué tanta información se tenga ($f'(a), f''(a), f'''(a), \dots$).

La serie de potencias dada por la ecuación (4) se denominará *serie de Taylor* de f alrededor de a . Si sólo se conserva un número finito de términos, la expresión resultante se denominará entonces *polinomio de Taylor* de f alrededor de a . Así pues, el polinomio de Taylor de orden n , de la función f alrededor de a , está dado por:

$P_n(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n$	(5)
--	-----

Haciendo $x = a + h$ en las ecuaciones (4) y (5) se obtiene:

$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$	(6)
--	-----

Y:

$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$	(7)
--	-----

Por otra parte, si usamos un polinomio de Taylor para aproximar una función, entonces, el error absoluto correspondiente será:

$$e_a = |f(x) - P_n(x)| \tag{8}$$

Y el error relativo:
$$e_r = \frac{e_a}{|f(x)|} = \left| \frac{f(x) - P_n(x)}{f(x)} \right| \quad (9)$$

Por ejemplo, si $f(x) = e^x$ y $a = 0$, entonces, para cualquier $k = 1, 2, \dots$, tendremos que $f^{(k)}(x) = e^x$ y $f^{(k)}(0) = 1$, así que la serie de Taylor de la función exponencial, alrededor de $x = 0$, de acuerdo con (6) es:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$$

Y el polinomio de Taylor, de orden n , es:

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

Ahora consideremos en particular los polinomios de primero, segundo, tercero y cuarto orden:

$$P_1(x) = 1 + x, \quad P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2, \quad P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

y
$$P_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

x	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$f(x)$ (calc.)
0.5	1.5	1.625	1.645833	1.64844	1.648721
0.2	1.2	1.22	1.221333	1.2214	1.221403
0.1	1.1	1.105	1.105167	1.10517	1.105171
0.01	1.01	1.01005	1.010050	1.01005	1.010050

Tabla 2

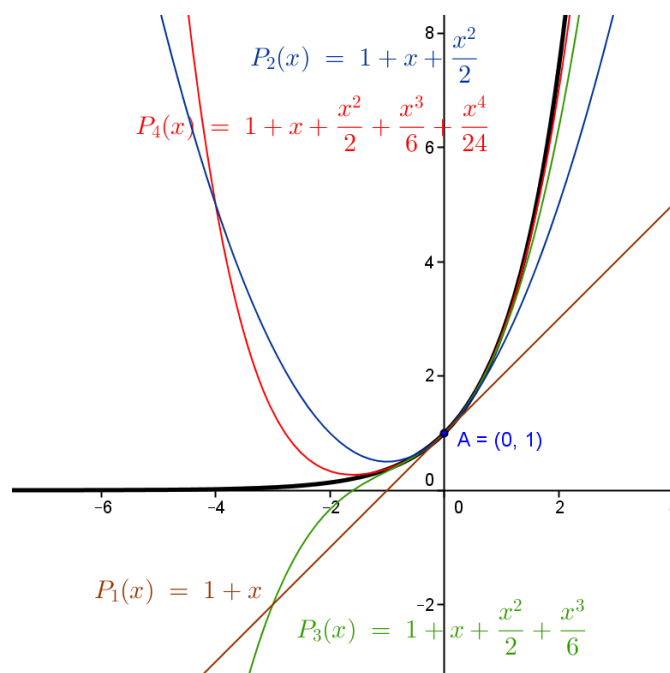


Figura 3

En la tabla 2 se muestran los valores de estos polinomios, así como de la función exponencial, para de $x = 0.5, 0.3, 0.1$ y 0.01 , mientras que en la figura 3 se muestran las gráficas de la función exponencial, así como de los polinomios de Taylor obtenidos. Podemos observar que tanto la tabla como la figura muestran el comportamiento esperado:

La aproximación de una función por medio de un polinomio de Taylor mejora conforme aumenta el número de términos del polinomio y conforme el valor de la variable es más próximo al valor de referencia (o conforme el punto sobre la curva se acerca al punto de tangencia).	(10)
---	------

Siempre que una función pueda expresarse para un determinado valor de la variable, mediante una serie de potencias (serie de Taylor), se dirá que la función es *analítica* para ese valor de la variable. En ingeniería, normalmente se trabaja sólo con funciones analíticas en todo su dominio, por lo que aquí se supondrá, siempre, que todas las funciones son analíticas.

Si f es una función definida mediante $y = f(x)$, y si Δx es un incremento finito de la variable x , tal que $a + \Delta x$ esté en el intervalo de convergencia de la serie de potencias de f , tendremos entonces:

$f(a + \Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x + \frac{f''(a)}{2!}\Delta x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\Delta x^n + \dots$	(11)
--	------

Así pues, para obtener el valor de la función, con una precisión dada, habrá que incluir el número de términos necesario, dependiendo del valor de la variable. Por otra parte, si P es un polinomio de grado n , todas las derivadas, a partir de la de orden $n + 1$, serán cero, así que P podrá expresarse en la forma:

$P(x + \Delta x) = P(a) + P'(a)\Delta x + \frac{P''(a)}{2!}\Delta x^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}\Delta x^n$	(12)
--	------

Por último, se sabe que, si una función puede expresarse mediante una serie de potencias, ésta tendrá que ser la serie de Taylor, es decir, el desarrollo en serie de potencias de cada función es único. Finalmente, también puede probarse que:

Si una función es analítica, será siempre posible despreciar, en su serie de potencias, los términos de orden superior a alguno previamente determinado, a condición de que el incremento de la variable sea suficientemente pequeño.	(13)
---	------

En adelante, nos referiremos a esta importante característica de las funciones analíticas como *propiedad lagrangiana*.

Serie de potencias alrededor del cero

Así como se obtuvo la serie de potencias de la función exponencial, alrededor del cero, puede obtenerse la de cualquier otra función trascendente. La serie alrededor del cero también se llama *serie de Maclaurin*.

Al final de este documento se da la serie de potencias, alrededor del cero, de cada una de las funciones trascendentes de mayor uso en las ciencias de la ingeniería. Estos desarrollos se obtienen a partir de (6), con $a = 0$.

Por ejemplo, para $f(x) = \sin x$ tenemos que $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{iv}(x) = \sin x$, y a partir de aquí el proceso se vuelve cíclico. Tenemos entonces que:

$$f(x) = f^{(4)}(x) = f^{(8)}(x) = \dots = \sin x,$$

$$f'(x) = f^{(5)}(x) = f^{(9)}(x) = \dots = \cos x,$$

$$f''(x) = f^{(6)}(x) = f^{(10)}(x) = \dots = -\sin x,$$

y $f'''(x) = f^{(7)}(x) = f^{(11)}(x) = \dots = -\cos x,$

Considerando que $a = 0$, tenemos que:

$$f(0) = f^{(4)}(0) = f^{(8)}(0) = \dots = 0,$$

$$f'(0) = f^{(5)}(0) = f^{(9)}(0) = \dots = 1,$$

$$f''(0) = f^{(6)}(0) = f^{(10)}(0) = \dots = 0,$$

y $f'''(0) = f^{(7)}(0) = f^{(11)}(0) = \dots = -1,$

Por lo tanto, la serie de potencias (alrededor del cero) de la función seno será, de acuerdo con (6):

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

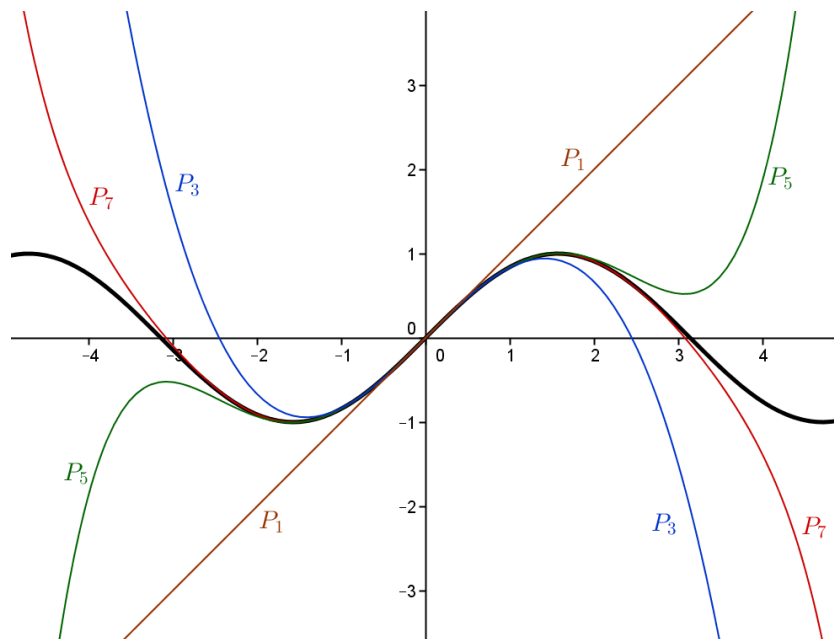


Figura 4

Los polinomios aproximantes de la función seno (alrededor del cero), de grados 1, 3, 5 y 7, son, respectivamente:

$$P_1(x) = x,$$

$$P_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3,$$

$$P_5(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

$$\text{y } P_7(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7$$

La gráfica de cada uno de estos polinomios, lo mismo que la de la función $f(x) = \sin x$ (en trazo grueso) se muestra en la figura 4.

3. APROXIMACIÓN POLINOMIAL DE UNA FUNCIÓN

Hemos estudiado la aproximación lineal del incremento. Vamos ahora a extender el estudio de esta aproximación, recurriendo a polinomios de mayor orden.

Para ello consideremos una función $f(x)$ y supongamos que la variable x tiene un incremento h , a partir de a , entonces el valor de la función para $x = a + h$ está dado por:

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \dots$$

Que se puede escribir como:

$$f(a + h) - f(a) = f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \dots \quad (a)$$

Ahora, reconociendo que el incremento correspondiente de la función es $\Delta f = f(a + h) - f(a)$ y que $\delta f = f'(a)h$, esta última ecuación puede escribirse como:

$$\Delta f = \delta f + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \dots$$

En esta ecuación se observa claramente la razón por la que δf se ha denominado aproximación lineal del incremento.

Por otra parte, sabemos también que esta aproximación será tan buena como se desee, a condición de hacer el incremento h de la variable suficientemente pequeño, sin embargo, si se desea mejorar la aproximación para un determinado valor de h , la última ecuación nos indica que deberán tomar más términos del polinomio, obteniéndose así una aproximación polinomial del incremento de la función, para un valor dado de la variable y de su incremento.

Así pues, ya que los polinomios que resultan de tomar los términos de la serie de potencias de h , de acuerdo con (a), son aproximaciones del incremento Δf , podemos definir las aproximaciones polinómicas del incremento, de grados 2, 3 y 4, mediante:

$$\delta^2 f = f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 \quad (14)$$

$$\delta^3 f = f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 \quad (15)$$

$$\delta^4 f = f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \frac{f^{iv}(a)}{4!}h^4 \quad (16)$$

Por ejemplo, si f es la función definida mediante $w = f(x) = x^2 e^x$, y suponiendo que el valor de x cambia de 1 a 1.1, el incremento correspondiente en el valor de la función será entonces:

$$\Delta w = f(1.1) - f(1) = (1.1)^2 e^{1.1} - (1)^2 e^1 \cong 3.63504 - 2.71828 \cong 0.91676$$

Para la aproximación lineal del incremento, tenemos que $f'(x) = 2x e^x + x^2 e^x = (2x + x^2)e^x$, así que $f'(1) = 3e \cong 8.15485$, y como $h = 1.1 - 1 = 0.1$, entonces $\delta f(1, 0.1) \cong 8.15485(0.1) \cong 0.815485$. El error cometido en esta aproximación lineal es $e_1 \cong \left| \frac{0.91676 - 0.815485}{0.91676} \right| \cong 11\%$.

Si ahora consideramos la aproximación cuadrática del incremento, tenemos que $f''(x) = (2x + x^2)e^x + (2 + 2x)e^x = (2 + 4x + x^2)e^x$, así que $f''(1) = 7e \cong 19.028$, y, tendremos que:

$$\delta^2 f(1, 0.1) \cong 0.815485 + \frac{19.028}{2} (0.1)^2 \cong 0.910625$$

Por lo que el error cometido con la aproximación cuadrática se reduce a:

$$e_2 \cong \left| \frac{0.91676 - 0.910625}{0.91676} \right| \cong 0.7\%$$

Finalmente, si la función es un polinomio de grado n , la aproximación polinomial de grado n coincidirá exactamente con el incremento.

Por ejemplo, consideremos la aproximación polinómica del volumen de una esfera hueca con un espesor pequeño, como la que usaríamos para estimar la cantidad de metal necesaria para fabricar una esfera de radio (interior) r y espesor (pequeño) ε .

Dicha cantidad es el incremento, en el volumen de la esfera, correspondiente al incremento del radio desde su valor inicial (radio interior) hasta su valor final (radio exterior).

Tomando en cuenta que el volumen de una esfera de radio r es $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, entonces el incremento de volumen, correspondiente a un cambio ε en el valor del radio, con valor inicial r será:

$$\Delta V(r, \varepsilon) = V(r + \varepsilon) - V(r) = \frac{4}{3}\pi(r + \varepsilon)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Delta V(r, \varepsilon) = \frac{4}{3}\pi(r^3 + 3r^2\varepsilon + 3r\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - r^3) = \frac{4}{3}\pi(3r^2\varepsilon + 3r\varepsilon^2 + \varepsilon^3)$$

$$\Delta V(r, \varepsilon) = 4\pi r^2\varepsilon + 4\pi r\varepsilon^2 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$$

Por otro lado, las aproximaciones polinomiales de primero segundo y tercer orden estarán dadas por:

$$\delta V(r, \varepsilon) = 4\pi r^2\varepsilon$$

$$\delta^2 V(r, \varepsilon) = 4\pi r^2\varepsilon + 4\pi r\varepsilon^2$$

$$\delta^3 V(r, \varepsilon) = 4\pi r^2\varepsilon + 4\pi r\varepsilon^2 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$$

Por supuesto que la aproximación cúbica coincide con el incremento, ya que el volumen es una función cúbica del radio.

En la tabla 3 se muestran los valores (aproximados hasta décimas de centímetro cúbico) del incremento del volumen de la esfera hueca, así como de sus aproximaciones lineal y cuadrática, para un radio de 12 cm y espesores de 0.5, 0.2 y 0.1 cm. En cada caso se incluye el error relativo cometido en la aproximación. Si se conoce el peso específico del material con el que habrá de hacerse la esfera, bastará con multiplicarlo por el volumen obtenido para obtener el peso de la esfera hueca resultante.

ε	$\Delta V(12, \varepsilon)$	$\delta V(12, \varepsilon)$	e_1	$\delta^2 V(12, \varepsilon)$	e_2
0.5	943.0	904.8	4%	942.5	0.05%
0.2	368.0	361.9	1.7%	367.9	0.03%
0.1	182.5	181.0	0.8%	182.5	0 ³

Tabla 3

Obsérvese además que la expresión correspondiente a la aproximación lineal indica que, si el espesor es suficientemente pequeño, el volumen de la esfera hueca puede calcularse al multiplicar el área de la esfera interior por su espesor.

³ Por supuesto que el error no es cero. Lo que indica este resultado es que la aproximación cuadrática coincide con el incremento, con una precisión de décimas de centímetro cúbico.

SERIES DE POTENCIAS

Funciones algebraicas

$$\text{Serie geométrica: } \frac{p}{1-r} = p + pr + pr^2 + pr^3 + \dots + pr^n + \dots \quad -1 < r < 1$$

$$\text{Serie binomial: } (1+w)^n = 1 + nw + \frac{n(n-1)}{2!}w^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}w^3 + \dots \quad -1 < w < 1$$

Funciones trascendentes

$$e^w = 1 + w + \frac{1}{2!}w^2 + \frac{1}{3!}w^3 + \dots + \frac{1}{n!}w^n + \dots \quad w \in \mathbb{R}$$

$$a^v = 1 + kv + \frac{k^2}{2!}v^2 + \frac{k^3}{3!}v^3 + \dots + \frac{k^n}{n!}v^n + \dots \quad k = \ln a \quad v \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+w) = w - \frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{3}w^3 - \frac{1}{4}w^4 + \dots \quad -1 < w < 1$$

$$\log_a(1+w) = \frac{1}{k} \left(w - \frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{3}w^3 - \frac{1}{4}w^4 + \dots \right) \quad k = \ln a \quad -1 < w < 1$$

$$\operatorname{sen} w = w - \frac{1}{3!}w^3 + \frac{1}{5!}w^5 - \frac{1}{7!}w^7 + \dots \quad w \in \mathbb{R}$$

$$\cos w = 1 - \frac{1}{2!}w^2 + \frac{1}{4!}w^4 - \frac{1}{6!}w^6 + \dots \quad w \in \mathbb{R}$$

$$\tan w = w + \frac{1}{3}w^3 + \frac{2}{15}w^5 + \frac{17}{315}w^7 + \dots \quad -\frac{\pi}{2} < w < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{atan} w = w - \frac{1}{3}w^3 + \frac{1}{5}w^5 - \frac{1}{7}w^7 + \dots \quad -1 < w < 1$$

$$\operatorname{senh} w = w + \frac{1}{3!}w^3 + \frac{1}{5!}w^5 + \frac{1}{7!}w^7 + \dots \quad w \in \mathbb{R}$$

$$\cosh w = 1 + \frac{1}{2!}w^2 + \frac{1}{4!}w^4 + \frac{1}{6!}w^6 + \dots \quad w \in \mathbb{R}$$

Serie de Taylor

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \dots$$

$$P_n(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$