

RAZÓN DE CAMBIO Y FUNCIÓN DERIVADA

1. RAZÓN DE CAMBIO

La rapidez con la que se mueve un objeto en el espacio es una razón de cambio que se estudia desde la secundaria, pero no es la única de interés en las ingenierías. En general, si las variables x y y están relacionadas mediante $y = f(x)$, de manera que a cada valor de x (en el dominio de la función f) le corresponde un único valor de y , y si y cambia su valor de $f(a)$ a $f(a + \Delta x)$ cuando x lo hace de a a $a + \Delta x$, diremos que la *razón promedio de cambio* de y respecto de x , correspondiente al incremento Δx de la variable (a partir de $x = a$), es la razón entre el incremento de la función y el de la variable, es decir:

$$\frac{\Delta y(a, \Delta x)}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \quad (1)$$

Por ejemplo, supóngase que la temperatura en una habitación en la ciudad de Toluca, México, en una noche de verano, fue de 25°C a las 8 PM, 20°C a las 2 AM (del día siguiente) y 15°C a las 5 AM (figura 1, izquierda).

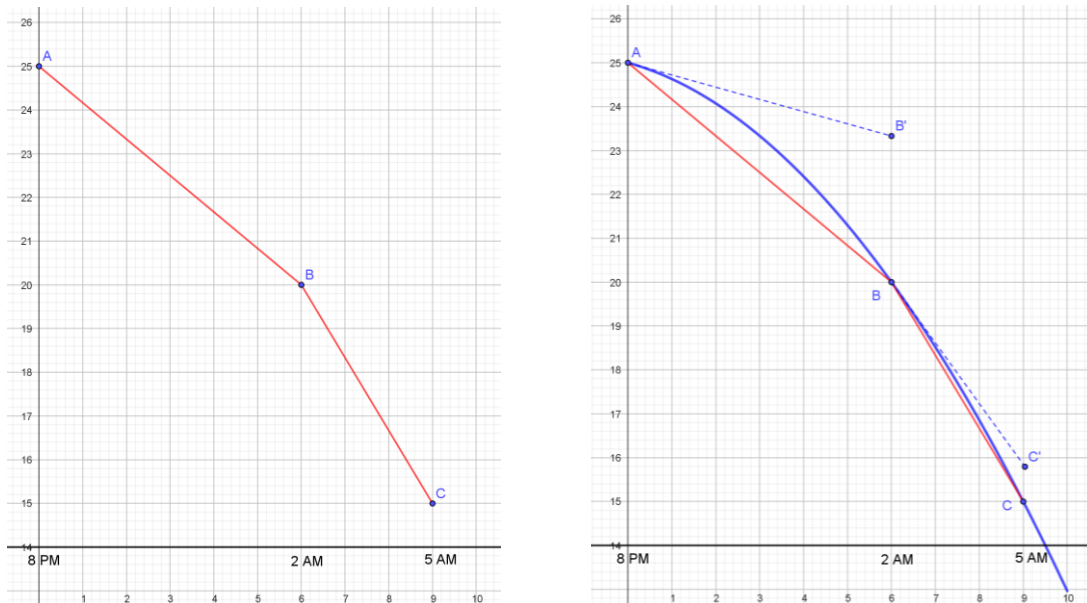


Figura 1

De esta manera, entre las 8 PM y las 2 AM, considerando la temperatura T como una función del tiempo, tendremos que la razón de cambio de la temperatura, en ese intervalo de tiempo fue:

$$\frac{\Delta T(0,6)}{\Delta t} = \frac{T(6) - T(0)}{\Delta t} = \frac{20 - 25}{6} = -\frac{5}{6} \text{ } ^\circ\text{C/hr}$$

Esta razón de cambio es la pendiente del segmento AB, y nos indica que, entre las 8 PM y las 2 AM, la temperatura descendió $\frac{5}{6}$ °C cada hora, en promedio.

Análogamente, entre las 2 y las 5 AM, es decir, entre 6 y 9 horas a partir del primer momento considerado (8 PM), la razón de cambio correspondiente fue:

$$\frac{\Delta T(6,9)}{\Delta t} = \frac{T(9)-T(6)}{9-6} = \frac{15-20}{3} = -\frac{5}{3} \text{ } ^\circ\text{C/hr}$$

Dicha razón de cambio está indicada en la figura mediante la línea BC, y nos indica que, entre las 2 y las 5 de la mañana, la temperatura descendió $\frac{5}{3}$ de grado centígrado cada hora, en promedio. Así pues, entre las 2 y las 5 de la mañana, la temperatura disminuyó con el doble de rapidez que entre las 8 de la noche y las 2 de la mañana.

Podemos preguntarnos ahora: ¿con qué rapidez estaba variando (al parecer disminuyendo) la temperatura a las 2 de la mañana?

El problema que enfrentamos al tratar de dar respuesta a esta pregunta es que la razón de cambio se mide con referencia a dos momentos diferentes, y aquí sólo se tiene uno. Sin embargo, podemos dar respuesta a la pregunta si consideramos un intervalo infinitesimal (de tiempo), a partir del momento indicado. Así, para las 2 de la mañana, es decir, para $t = 6$ horas, la razón de cambio buscada estaría dada por $\frac{T(6+dt)-T(6)}{dt}$.

En general, si x y y están relacionadas mediante $y = f(x)$, la *razón (instantánea) de cambio* de y respecto de x , en el momento correspondiente a $x = a$, se define mediante:

$$\frac{dy(a)}{dx} = \frac{f(a+dx)-f(a)}{dx} \quad (2)$$

Podemos decir entonces que la *razón promedio de cambio* es la razón existente entre el incremento de la función y el de la variable, cuando tales incrementos son finitos, mientras que en la *razón instantánea de cambio* los incrementos han de ser infinitesimales, esto es, la razón de cambio es la razón existente entre la diferencial de la función y la de la variable.

Por lo tanto, para poder conocer exactamente la razón instantánea de cambio de una variable y , respecto de otra variable x , debemos conocer la ecuación que relaciona ambas variables, o, mejor aún, la expresión para y como una función de x (regla de correspondencia de la función).

Así, para el ejemplo considerado, si supiéramos que la temperatura T (en °C) está dada en función del tiempo t (en horas, a partir de las 8 PM) mediante:

$$T(t) = -\frac{5}{54}t^2 - \frac{5}{18}t + 25 \quad (3)$$

Entonces, al obtener la diferencial tendremos que:

$$dT(t) = -\frac{10}{54}t dt - \frac{5}{18}dt = \left(-\frac{5}{27}t - \frac{5}{18}\right)dt$$

Al dividir esta expresión por la diferencial del tiempo, se obtiene que la razón de cambio de la temperatura, para cualquier tiempo t está dada por:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{5}{27}t - \frac{5}{18} \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{hr}}$$

En particular, para $t = 0$ (8 PM), la razón de cambio es:

$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{5}{18} \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{hr}} \cong -0.28 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{hr}}$$

Por lo que vimos en la sección anterior, podemos afirmar que la razón (instantánea) de cambio es la pendiente de la recta tangente a la curva, en el punto considerado. En la figura 1 (derecha) se muestra la curva (definida mediante la ecuación 3) y una porción de la recta tangente correspondiente a las 8 PM. Podemos observar que el resultado obtenido nos indica que, si a partir de A la temperatura hubiera descendido $\frac{5}{18}^{\circ}\text{C}$ cada hora, y esa rapidez de variación se hubiese conservado, la temperatura habría descendido $\left(\frac{5}{18}\right) \times 6 \cong 1.7^{\circ}\text{C}$, al cabo de 6 horas, llegando a $25 - 1.7 = 23.3^{\circ}\text{C}$ a las 2 AM (punto B' en la figura 4.1).

Análogamente, si se considera la razón de cambio correspondiente a $t = 6$ (2 AM), esta será $\left. \frac{dT}{dt} \right|_{t=6} = \left(-\frac{5}{27}(6) - \frac{5}{18}\right) \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{hr}} \cong -1.39 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{hr}}$. De esta manera, si a partir de las 2 AM se hubiera conservado constante la rapidez de variación de la temperatura, 3 horas después, es decir a las 5 AM, la temperatura habría sido $20 - 1.39 \times 3 \cong 15.8^{\circ}\text{C}$, situación que corresponde al punto C' de la figura.

2. FUNCIÓN DERIVADA

Ya que la diferencial de una función es a su vez otra función, la razón de cambio, por lo tanto, también lo será, y como la razón de cambio es un concepto sumamente importante en la ingeniería, convendrá dar un nombre a esta nueva función. Desde los albores del siglo XIX el matemático italiano Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) dio el nombre de *derivada* a esta función.

Así pues, si f es una función definida mediante $y = f(x)$, llamaremos *función derivada* de f , que denotaremos mediante f' , a aquella que proporciona el valor de la razón de cambio de la función respecto de la variable, para cualquier valor de esta. Es decir:

Siendo $y = f(x)$, la (función) derivada de f , denotada por f' , o por $D_x f(x)$, estará definida mediante:	
$f'(x) = D_x f(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$	(4)

Así pues, la derivada de una función (respecto de la variable de la que depende) es aquella otra función que resulta de calcular la razón existente entre la diferencial de la función dada y la de la variable. Por lo tanto, para calcular la derivada basta con calcular la diferencial de la función mediante la tabla antes considerada y dividirla por la diferencial de la variable. Por ejemplo, si $y = f(x) = \arctan 2x$, entonces $dy = \frac{2 dx}{1+4x^2}$, así que $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{2}{1+4x^2}$. Es decir $D_x(\arctan 2x) = \frac{2}{1+4x^2}$.

Aunque podemos calcular la derivada como el cociente de la diferencial de la función y la de la variable, resultará más práctico calcular las derivadas de manera directa. Para ello se

utilizará una tabla de derivadas, como la que se da en el anexo B. Ahora bien, para obtener cada una de las reglas mostradas en dicha tabla se utilizan la definición (4) y la tabla para el cálculo de diferenciales. Por ejemplo, si u es una función de x , y si $y = \arctan u$, entonces $dy = \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{1}$, así que, al dividir por dx se obtendrá $\frac{dy}{dx} = D_x(\arctan u) = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$.

De esta manera queda demostrado el teorema T13 de la Tabla de derivadas anexa. En general tenemos que, si $w = f(u)$ y $u = g(x)$, entonces:

$$D_x w = \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{du} \frac{du}{dx}$$

Esta relación es conocida como *regla de la cadena*.

Aproximación lineal de la derivada en un punto. La definición (4), y los teoremas para la derivación nos permiten obtener la función derivada de una función dada. Si en la regla de correspondencia así obtenida asignamos un valor particular a la variable, obtendremos el valor de la función derivada para ese valor de la variable. En tal caso tendríamos:

Siendo $y = f(x)$, y h un infinitesimal, el valor de la (función) derivada de f, correspondiente al valor a, de la variable, estará definida mediante: $f'(a) = \left. \frac{dy}{dx} \right _{x=a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$	(5)
--	-----

Por ejemplo, si $f(x) = \cos \sqrt{x^2 + 1}$, entonces, aplicando los teoremas de derivación, obtenemos que:

$$f'(x) = -\sin \sqrt{x^2 + 1} D_x \sqrt{x^2 + 1} = -\sin \sqrt{x^2 + 1} \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} D_x (x^2 + 1)$$

$$f'(x) = -\sin \sqrt{x^2 + 1} \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} (2x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \sin \sqrt{x^2 + 1}$$

Si, por ejemplo, $x = 1$, tendremos que:

$$f'(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2} \cong -0.698456$$

Entonces, para obtener el valor de la derivada para un valor dado de la variable, primero tenemos que calcular la derivada de la función y enseguida sustituir el valor dado de la variable. Podemos, sin embargo, obtener una aproximación del valor de la derivada de una función en un punto, si se utiliza un valor “muy pequeño” de h en lugar de uno infinitesimal (en la definición 5) y se hacen las cuentas con una calculadora. En resumen:

Siendo $y = f(x)$ y h un número “muy pequeño”, el valor aproximado de la (función) derivada de f, correspondiente al valor a de la variable será: $f'(a) = \left. \frac{dy}{dx} \right _{x=a} \cong \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$	(6)
---	-----

Así, para la función f y el número a del ejemplo anterior, con $h = 0.0001$, tenemos que:

$$f'(1) \cong \frac{f(1.0001) - f(1)}{0.0001} \cong \frac{\cos \sqrt{1.0001^2 + 1} - \cos \sqrt{2}}{0.0001} \cong \frac{0.155874 - 0.155944}{0.0001} \cong -0.698477$$

Comparando con el valor obtenido con los teoremas, tenemos que el error relativo cometido al utilizar $h = 0.0001$ en lugar de una cantidad infinitesimal es, aproximadamente $\frac{|-0.698456 - (-0.698477)|}{|-0.698477|} \cong 0.003 \%$. Esta es una muy buena aproximación, y para calcularla sólo hicimos dos evaluaciones funcionales, una resta y una división. No se requirió derivar simbólicamente la función.

Ecuación diferencial y razón de cambio. Hemos visto que, si dos variables x y y están relacionadas mediante la ecuación $R(x, y) = 0$, al calcular la diferencial en cada parte de esta se obtiene una ecuación diferencial de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, y de aquí se puede despejar, por ejemplo $\frac{dy}{dx}$, obteniendo así la derivada como una función de las variables. Si se asignan entonces valores específicos de las variables, se obtendrá la razón con la que cambia y respecto de un cambio unitario en el valor de x .

Por ejemplo, sabemos que el radio r (medido, por ejemplo, en centímetros) y el volumen V (medido en centímetros cúbicos), de una esfera, están relacionados por medio de $V = \frac{4\pi}{3}r^3$. Al diferenciar cada parte de esta ecuación se obtiene $dV = 4\pi r^2 dr$, y de ahí $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$.

Si pensamos entonces que el radio de la esfera está aumentando continuamente, su volumen también lo hará, y la razón con que eso ocurre será $4\pi r^2$ metros cúbicos, por cada metro que aumente el radio, a partir de un valor determinado del mismo. Por ejemplo, en el momento en el que $r = 2.5$ m, el volumen estará aumentando a razón de $4\pi(2.5)^2 = 25\pi \cong 78.5 \frac{\text{m}^3}{\text{m}}$. Es decir, si el radio crece continuamente con esa rapidez, en el momento en el que mida 2.5 m, el volumen estará aumentando 78.5 m^3 por cada metro que aumente el radio, a partir de 2.5 m.

3. RECTA TANGENTE Y FUNCIÓN DERIVADA

Sabemos que las pendientes de las rectas tangente y normal a una curva definida mediante $R(x, y) = 0$, en el punto $P = (a, b)$, están dadas, respectivamente, por:

$$m_T = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(a,b)} \quad \text{y} \quad m_N = - \left. \frac{dx}{dy} \right|_{(a,b)}$$

Ahora bien, si la curva está definida mediante $y = f(x)$, entonces $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, así que:

Si C es una curva definida mediante $y = f(x)$ y P el punto de la curva cuya abscisa es a, entonces la pendiente de las rectas tangente y normal a C en P son, respectivamente: $m_T = f'(a) \quad \text{y} \quad m_N = - \frac{1}{f'(a)}$	(7)
---	-------

Por ejemplo, consideremos la curva definida mediante $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x + 1$ y los puntos A, de abscisa 1 y B, de abscisa 4 (figura 2). Al derivar la función obtenemos:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$$

Para el punto A, tenemos $m_{TA} = f'(1) = 3(1)^2 - 12(1) + 8 = 3 - 12 + 8 = -1$. De manera que $m_{NA} = -\frac{1}{-1} = 1$.

Análogamente, para el punto B $m_{TB} = f'(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 8 = 48 - 48 + 8 = 8$ y $m_{NB} = -\frac{1}{8}$.

Con esta información podemos trazar la curva y las rectas tangente y normal obtenidas, tal y como se muestra en la figura 2.

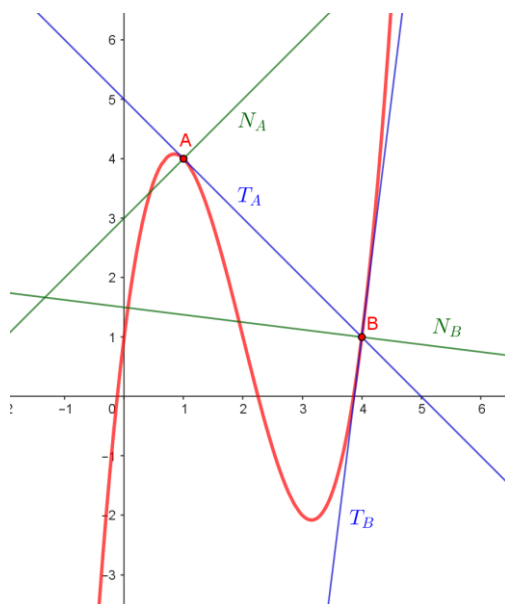


Figura 2

Tangente horizontal. Considerando que $f'(a) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}$, tenemos entonces que, si una curva está definida mediante $y = f(x)$, entonces la recta tangente será paralela al eje de abscisas, es decir, horizontal, en el punto $(a, f(a))$, siempre que $f'(a) = 0$.

Por ejemplo, para la función del ejemplo anterior, es decir, para la definida mediante $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x + 1$, hemos obtenido que $f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$, así que la curva tendrá tangente horizontal en aquellos puntos en los que $3x^2 - 12x + 8 = 0$, es decir, para $x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(3)(8)}}{2(3)} = \frac{12 \pm \sqrt{48}}{6} = \frac{12 \pm 4\sqrt{3}}{6} = 2 \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

La curva tiene entonces tangente horizontal en los puntos correspondientes a:

$$x_1 = 2 - \frac{2}{3}\sqrt{3} \cong 0.845 \quad \text{y} \quad x_2 = 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3} \cong 3.155$$

En la figura 3 se muestra la curva y las rectas tangentes en los puntos obtenidos, las cuales, como se observa claramente, son paralelas al eje x .

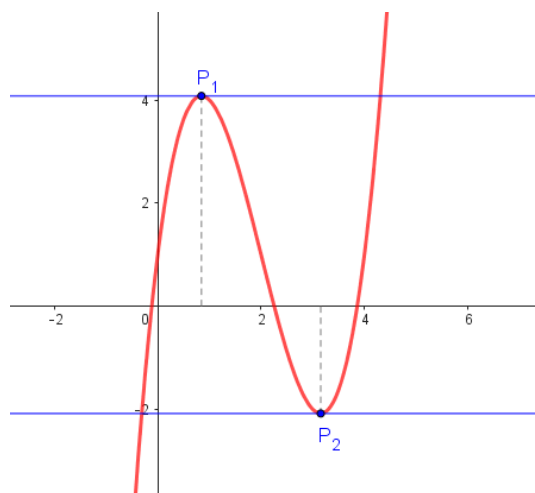


Figura 3

Tangente vertical. Por otra parte, de acuerdo con lo señalado en la sección anterior y considerando nuevamente una curva definida mediante $y = f(x)$, tendremos que la curva tendrá una tangente vertical en cada uno de los puntos en los que $\frac{1}{f'(x)} = 0$.

Esto va a ser estudiado, con más detalle, más adelante. Mientras tanto consideraremos, por ejemplo, la curva definida mediante $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + 1 = (x-1)^{1/3} + 1$, para la cual tenemos que $f'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-2/3} = \frac{1}{3(x-1)^{2/3}}$, de manera que hay una tangente vertical en $x = 1$, tal como se observa en la figura 4.

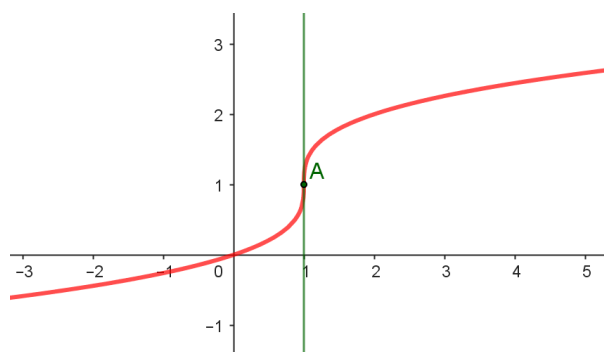


Figura 4

4. SUBTANGENTE Y SUBNORMAL

Si una curva está definida mediante $y = f(x)$, entonces $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ y $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}$, de manera que:

Si C es una curva definida mediante $y = f(x)$, la subtangente y la subnormal en cada punto de abscisa x de la curva, están dadas, respectivamente, por:		(8)
$\text{st}(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$	y	
$\text{sn}(x) = f(x)f'(x)$		

Por ejemplo, para la curva exponencial definida por $y = f(x) = e^{ax}$, tenemos que $f'(x) = a e^{ax}$, así que $st(x) = \frac{e^{ax}}{a e^{ax}} = \frac{1}{a}$. Este resultado nos indica que, para esta curva, la longitud de la subtangente es constante e igual al recíproco del coeficiente en el exponente. Por ejemplo, si $a = 0.5$, entonces $st(x) = \frac{1}{0.5} = 2$.

En la figura 5 se muestra la gráfica de la exponencial para tal valor de a , y algunos segmentos tangentes, todos trazados al ubicar el pie de la recta 2 unidades a la izquierda de la proyección perpendicular de cada punto sobre el eje x .

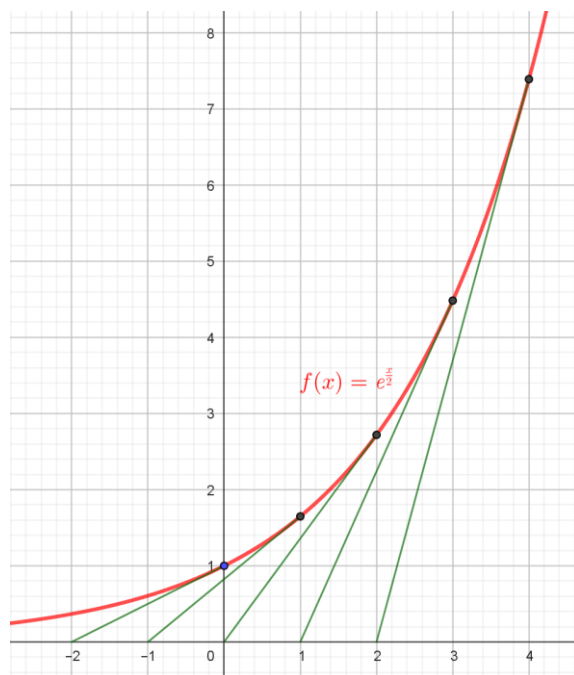


Figura 5

Consideremos un segundo ejemplo, el de la hipérbola definida mediante $y = f(x) = \frac{1}{x}$ (figura 6), para la cual $f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$. De manera que los segmentos subtangente y subnormal, para cada punto de abscisa x estarán dados, respectivamente, por:

$$st(x) = \frac{1/x}{-1/x^2} = -x \quad \text{y} \quad sn(x) = \left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^3}$$

Si el punto está en la rama del primer cuadrante, $x > 0$ y los segmentos tendrán signo negativo, lo que quiere decir que el pie de la tangente estará a la derecha de la proyección perpendicular del punto sobre el eje x y el de la normal a la izquierda de la misma.

Por otra parte, en el caso de la subtangente, el resultado nos dice que el pie de la tangente es el simétrico del origen respecto de la proyección ortogonal del punto sobre el eje x .

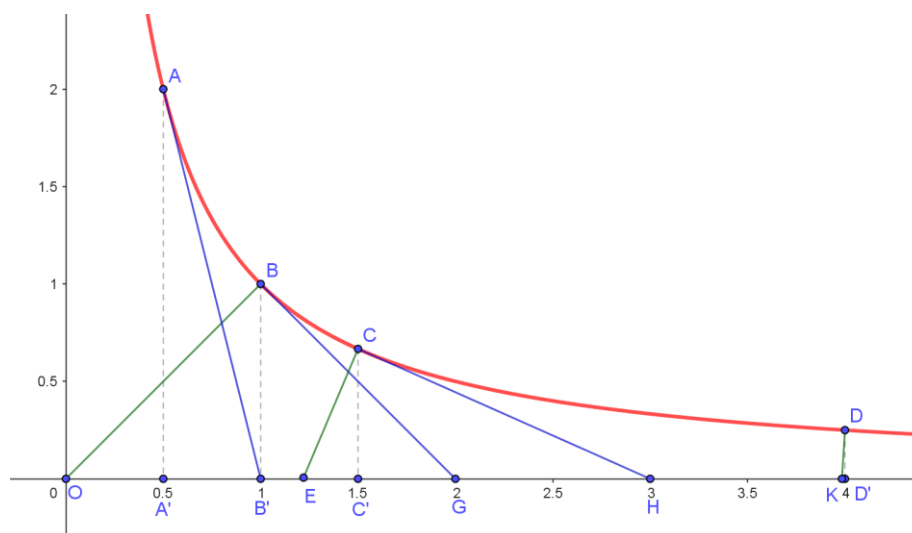


Figura 6

Por ejemplo, a partir del punto A de la curva, correspondiente a $x = 0.5$, la proyección perpendicular sobre el eje x es el punto A' y el simétrico del origen, respecto de A' es el punto B', que será el pie de la tangente a la curva en A. Análogamente, a partir del punto B, de abscisa 1, se obtiene la proyección B', y de ahí, el punto G (simétrico de O, respecto de B'), que será el pie de la tangente GG. Y a partir del punto C, se obtiene la proyección C', y, de ahí, el punto H, simétrico del origen, respecto de C'.

En cuanto a las normales, tenemos que la longitud de la subnormal correspondiente al punto de abscisa x es $-\frac{1}{x^3}$, así que para el punto B, de abscisa 1, la subnormal es -1 , de manera que el pie de este segmento se obtiene al moverse una unidad a la derecha desde 1, obteniendo el punto G, en $x = 2$. Para el punto C, de abscisa 1.5, hay que moverse $\frac{1}{1.5^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \cong 0.296$ unidades a la izquierda de la proyección C', para ubicar el punto E, pie de la normal a la curva en C.

Finalmente, nótese que la longitud de la subnormal es cada vez más pequeña, conforme x es más grande, por lo que el pie de la normal estará cada vez más cerca de la proyección perpendicular del punto, tal como ocurre con la normal en el punto D, de abscisa 4, cuyo pie está sólo 4 milésimas de unidad a la izquierda de la proyección al eje x , por D.

DERIVADA SEGUNDA Y DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Si aplicamos la definición de derivada a la misma función derivada, obtendremos la derivada de la derivada, a la que denominaremos *derivada segunda*. Denotaremos por f'' a la segunda derivada de una función f , de manera que, por ejemplo, si $f(x) = x^2 \sin x$, entonces:

$$f'(x) = x^2 \cos x + 2x \sin x$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= x^2(-\sin x) + 2x \cos x + 2x \cos x + 2 \sin x \\ &= -x^2 \sin x + 4x \cos x + 2 \sin x \end{aligned}$$

De manera análoga se define la derivada tercera de una función definida mediante $y = f(x)$, así como la cuarta y las siguientes, las cuales denotaremos mediante:

$$f'''(x) = y''' = \frac{d^3x}{dx^3}, \quad f^{iv}(x) = y^{iv} = \frac{d^4x}{dx^4}, \text{ etc.}$$

Por ejemplo, para la función del ejemplo anterior, tenemos, para la derivada tercera:

$$\begin{aligned} f'''(x) &= -x^2 \cos x - 2x \sin x + 4x(-\sin x) + 4 \cos x + 2 \cos x \\ &= -x^2 \cos x - 6x \sin x + 6 \cos x \end{aligned}$$

Pasemos a otra cosa. Una ecuación diferencial lineal, de segundo orden, con coeficientes constantes, es, por ejemplo:

$$y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$$

Podemos ver que una solución de esta ecuación es:

$$y = xe^{2x}$$

Veamos, si $y = xe^{2x}$, entonces $y' = 2xe^{2x} + e^{2x}$ y $y'' = 4xe^{2x} + 4e^{2x}$, de manera que, al sustituir en el lado izquierdo de la ecuación diferencial, obtenemos:

$$y'' - y' - 2y = (4xe^{2x} + 4e^{2x}) - (2xe^{2x} + e^{2x}) - 2(xe^{2x})$$

Y, al hacer la simplificación de la expresión, se obtiene:

$$(4xe^{2x} + 4e^{2x}) - (2xe^{2x} + e^{2x}) - 2(xe^{2x}) = 3e^{2x}$$

Así pues, al sustituir y , y' y y'' en la ecuación, esta se reduce a una identidad, por lo que podemos decir que la función $y = xe^{2x}$ es, en efecto, una solución de la ecuación diferencial $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$.