EL ASUNTO DE LA RECTA TANGENTE

RECTAS TANGENTE Y NORMAL A UNA CURVA EN EL PLANO

Consideremos una curva C, definida mediante $R(x,y)=0$, y un punto P de la curva. Sean además L_T, la recta tangente a C en P y L_N la recta normal a C en P (es decir, la recta perpendicular a L_T, que pasa por P), tal como se ilustra en la figura 1.

Si Q es un punto de la curva, infinitamente próximo a P, de manera que $\mathrm{PT}=dx$ y $\mathrm{TQ}=dy$, tendremos entonces que las pendientes de L_T y L_N son, respectivamente, $m_T=\frac{dy}{dx}$ y $m_N=-\frac{dx}{dy}$. Es decir:

Si C es una curva definida mediante $R(x,y)=0$ y $\mathrm{P}=(a,b)$ un punto de la curva, entonces las pendientes de las rectas tangente y normal a C en P son, respectivamente: $$m_T=\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{(a,b)} \quad \text{y} \quad m_N=-\left.\frac{dx}{dy}\right\|_{(a,b)}$$	(1)

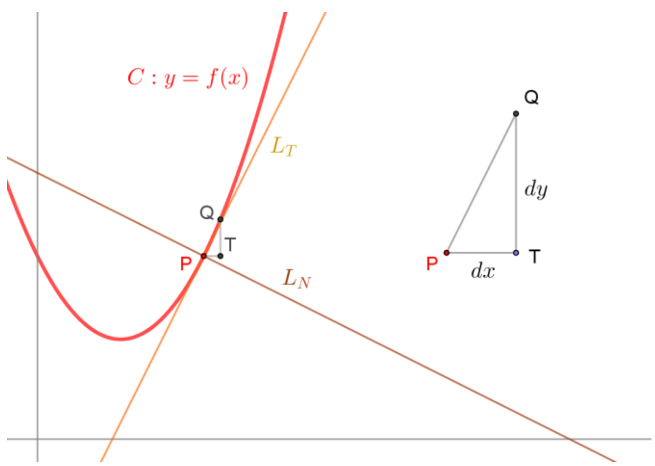

Figura 1

Hay que tener en cuenta que dx y dy son incrementos infinitesimales, medidos a partir del punto P, de manera que cualquiera de las expresiones $\frac{dy}{dx}$ o $\frac{dx}{dy}$ deberá evaluarse en dicho punto, lo cual se denota mediante la línea vertical, indicando inmediatamente (como subíndice) el punto en el que se evalúa la expresión, como ocurre en la ecuación (1).

Por ejemplo, para la parábola definida por $y^2=4x$, al calcular la diferencial en cada lado de la ecuación, tenemos que $2y\,dy=4\,dx$, de donde:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4}{2y}=\frac{2}{y} \qquad \text{y} \qquad \frac{dx}{dy}=\frac{y}{2}$$

De esta manera, la pendiente de la recta tangente en cada punto de la parábola está dado por $m_T = \frac{2}{y}$ y la de la recta normal por $m_N = -\frac{y}{2}$. En particular, para el punto $\mathrm{P} = (1{,}2)$ se tendrá $m_T = \frac{2}{y} = \frac{2}{2} = 1$ y $m_N = -\frac{y}{2} = -\frac{2}{2} = -1$. La curva dada y las rectas tangente y normal obtenidas se muestran en la figura 2.

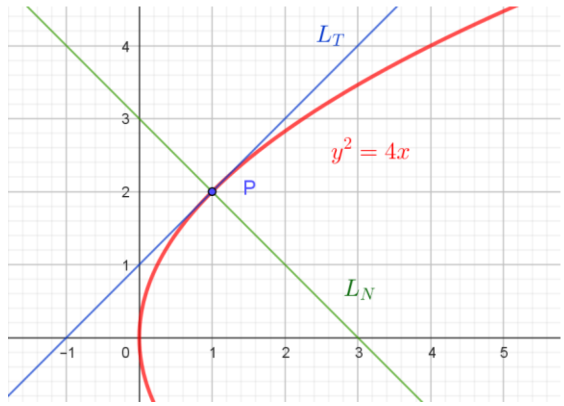

Figura 2

Ahora bien, hay dos situaciones que resultan de particular interés, y son aquellas en las que la recta tangente es horizontal (paralela al eje x) o vertical (paralela al eje y). A partir de la figura 4.5 podemos concluir, por una parte, que si la tangente a una curva definida por medio de $R(x, y) = 0$ es horizontal, entonces los puntos P y Q están sobre una misma recta horizontal (Q coincide con T), en cuyo caso $dy = 0$, o bien $\frac{dy}{dx} = 0$. Es decir:

Si C es una curva definida mediante $R(x, y) = 0$, y si en un punto P se tiene que $\frac{dy}{dx} = 0$, entonces la recta tangente a C en P es horizontal (paralela al eje de abscisas) y la recta normal es vertical.	(2)

Análogamente podemos decir que la tangente a una curva definida por medio de $R(x, y) = 0$, es vertical, si P y Q están sobre una misma recta vertical, en cuyo caso $dx = 0$ o bien $\frac{dx}{dy} = 0$, es decir:

Si C es una curva definida mediante $R(x, y) = 0$, y si en un punto P se tiene que $\frac{dx}{dy} = 0$, entonces la recta tangente a C en P es vertical (paralela al eje de ordenadas) y la recta normal es horizontal.	(3)

SUBTANGENTE Y SUBNORMAL

Toda recta queda determinada por dos cualesquiera de sus puntos y, por lo tanto, por un segmento de la recta. Antiguamente el asunto de la recta tangente era la de ubicar otro punto de la recta, además del punto de contacto, para que la recta quedara determinada y, en su caso, se hiciera el trazo correspondiente.

Entre los matemáticos del siglo XVII, ese punto era el de intersección de la recta tangente con el eje de las abscisas (que entonces se denominaba diámetro), de manera que parte de la recta tangente y de la normal lo eran los segmentos TP y NP de la figura 3.

Con relación a la misma figura, los segmentos comprendidos entre los puntos de intersección de la tangente y la normal con el eje de abscisas, y la proyección ortogonal del punto de tangencia, sobre el eje de abscisas, son llamados, respectivamente, *subtangente* y *subnormal* (segmentos TW y WN).

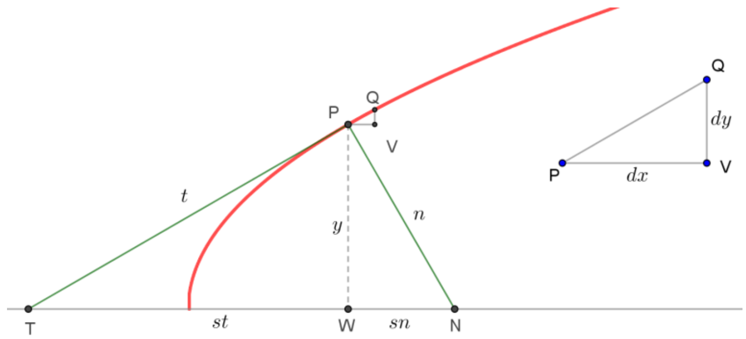

Figura 3

Con esto en mente, y por lo visto en los capítulos anteriores, vamos a obtener expresiones para la longitud de la subtangente y de la subnormal, como funciones de las coordenadas del punto de contacto. Así pues, si $\mathrm{P} = (x, y)$ es un punto de la curva definida por $R(x, y) = 0$, y $\mathrm{Q} = (x + dx, y + dy)$ otro punto de la misma curva, infinitamente próximo a P, entonces el segmento PQ será parte de la prolongación del segmento tangente TP. Si, además, V es el punto tal que el triángulo PVQ es rectángulo, el cual se muestra ampliado en la figura 4, y considerando la semejanza de los triángulos TWP y PWN, tenemos que:

$$\frac{\mathrm{WP}}{\mathrm{TW}} = \frac{\mathrm{VQ}}{\mathrm{PV}} = \frac{\mathrm{WN}}{\mathrm{WP}}, \qquad \frac{y}{\mathrm{TW}} = \frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{WN}}{y}$$

De donde:

$$\text{Subtangente} = \mathrm{st} = \mathrm{TW} = \frac{y\,dx}{dy} = y\,\frac{dx}{dy}$$

y $$\text{Subnormal} = \mathrm{sn} = \mathrm{WN} = \frac{y\,dy}{dx} = y\,\frac{dy}{dx}$$

En resumen:

Si *C* es una curva definida mediante $R(x, y) = 0$, la subtangente y la subnormal en cada punto (x, y) de la curva son, respectivamente: $$\mathrm{st} = y\,\frac{dx}{dy} \quad \text{y} \quad \mathrm{sn} = y\,\frac{dy}{dx}$$	(4)

Por ejemplo, consideremos la parábola definida por $y^2 = ax$. Al obtener la diferencial en cada parte se obtiene $2y\,dy = a\,dx$, de donde, al despejar cada uno de los cocientes diferenciales que se requieren, de acuerdo con (4.8), se obtiene:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a} \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y}$$

Por lo tanto:

$$\text{st} = y \cdot \frac{2y}{a} = \frac{2y^2}{a} = \frac{2ax}{a} = 2x \qquad \text{y} \qquad \text{sn} = y\frac{a}{2y} = \frac{a}{2}$$

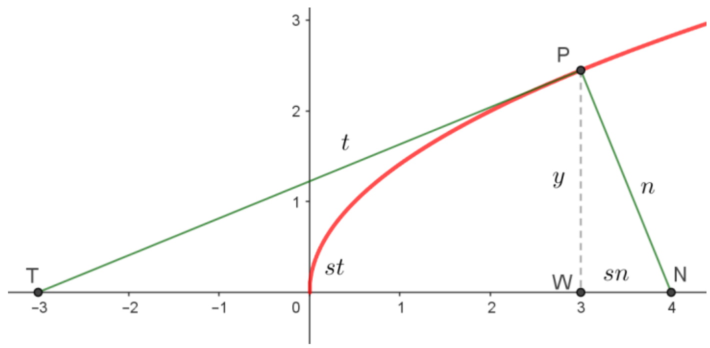

Figura 4

Estos resultados nos dicen, por una parte, que para cualquier parábola (figura 4), si se desea trazar la tangente en un punto dado P, hay que proyectar perpendicularmente el punto sobre el eje de la parábola (punto W), y obtener el simétrico de tal proyección, respecto del vértice V, obteniendo así el punto T, en el que la tangente interseca al eje. Por otra parte, la subnormal a cualquier parábola es constante e igual a medio lado recto.

En la figura se muestran la parábola correspondiente a $a = 2$, es decir la definida por medio de $y^2 = 2x$ y el punto de abscisa $x = 3$, para el cual $\text{st} = 2(3) = 6$ y $\text{sn} = \frac{2}{2} = 1$.

Ahora bien, ya que las expresiones dadas en (4) se obtuvieron a partir de la figura 3, cuando la subtangente resulte positiva, se medirá hacia la izquierda, y cuando sea negativa, hacia la derecha. De la misma manera, la subnormal se medirá hacia la derecha cuando sea positiva y hacia la izquierda cuando sea negativa.