INCREMENTO Y DIFERENCIAL

DEFINICIONES

El *cambio* o *incremento* de una variable no es más que la diferencia entre dos de sus valores, esto es, el valor "nuevo" menos el original, mientras que una razón de cambio es el cociente de dos de tales incrementos.

Ahora bien, con frecuencia interesará conocer cómo están relacionados los cambios de las distintas variables que intervienen en un fenómeno, particularmente para hacer predicciones —con un grado aceptable de certidumbre— de lo que ocurrirá con el valor de alguna variable en particular (variable dependiente o función), sabiendo o suponiendo cómo cambiará el valor de otra de ellas (variable independiente o simplemente variable).

Esto puede hacerse con relativa facilidad cuando se conoce la regla de correspondencia entre las variables de interés, ya que en tal caso sólo hay que evaluar la función en los puntos de interés y calcular la diferencia. Sin embargo, hay situaciones —durante el proceso de modelación de un fenómeno, o cuando la información disponible es, por ejemplo, una tabla de valores— en que no se conoce la regla de correspondencia. En tales casos resulta sumamente útil poder estimar la magnitud del incremento de la función a partir de la magnitud del incremento de la variable y de la información disponible en el "punto de partida", es decir, de lo que se conoce de la función para el valor original o inicial de la variable, como el valor de la función o la rapidez con la que cambia su valor en ese punto.

Debido a que el eje de abscisas (donde se mide la variable) se recorre siempre, convencionalmente, "de izquierda a derecha", el incremento de la variable se considerará siempre positivo. De esta manera, si f es una función definida por $y = f(x)$, e interesa observar qué pasa con la función cuando la variable x cambia su valor de b a w, entonces el incremento de x es $w - b$ y el de la función $f(w) - f(b)$. En general:

incremento = valor final – valor inicial

Usualmente se simboliza un incremento mediante una letra Δ (delta mayúscula), de manera que el incremento de una variable x será:

$$\Delta x = x_f - x_i \tag{1}$$

Donde x_i y x_f son, respectivamente, los valores inicial y final de x.

Ahora bien, si el incremento de la variable es infinitesimal, es decir, si los valores inicial y final de la variable difieren en una cantidad infinitamente pequeña, el incremento se llamará *diferencial*, en cuyo caso se usará una d en lugar de la Δ. Así pues, dx denotará un incremento infinitesimal de la variable x.

De esta manera, siendo f una función definida por $y = f(x)$, y suponiendo que x tiene un valor inicial x y un incremento dx (y, por lo tanto, un valor final $x + dx$), se dirá entonces que el correspondiente incremento de la función —el cual, suponiendo continuidad en la función, se espera que sea también infinitesimal— es la *diferencial de la función*, es decir:

$$df(x) = f(x+dx) - f(x)$$	(2)

Por ejemplo, si $y = x^2$, entonces $dy = d(x^2) = (x+dx)^2 - x^2 = x^2 + 2x\,dx + (dx)^2 - x^2 = 2x\,dx + (dx)^2$, sin embargo, sólo se conservará el término principal, así, que $d(x^2) = 2x\,dx$.

CÁLCULO DE DIFERENCIALES

Si se conoce la regla de correspondencia de una función, su diferencial puede hallarse mediante la ecuación (2), sin embargo, el proceso puede agilizarse considerablemente si se conocen las reglas para diferenciar cada una de las funciones algebraicas y trascendentes de mayor uso en las ciencias básicas y de la ingeniería. Al final de este documento se anexa una tabla con la lista de estas reglas.

Teoremas básicos y funciones algebraicas

A2. *Suma o diferencia de funciones*

$$d(u \pm v \pm w) = du \pm dv \pm dw$$

Prueba: si las variables u, v y w tienen incrementos du, dv y dw, respectivamente, entonces:

$$d(u + v - w) = [(u + du) + (v + dv) - (w + dw)] - (u + v - w)$$

$$d(u + v - w) = u + du + v + dv - w - dw - u - v + w = du + dv - dw$$

A3. *Producto de funciones*

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

Prueba: si las variables u y v tienen incrementos du y dv, respectivamente, entonces:

$$d(uv) = (u + du)(v + dv) - uv = uv + u\,dv + v\,du + du\,dv - uv$$

$$d(uv) = u\,dv + v\,du + du\,dv$$

Pero el término $du\,dv$ es el producto de dos infinitesimales, así que es infinitamente pequeño respecto de du y de dv y:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

El teorema A4 es una consecuencia directa de A3 y de considerar que una cantidad constante no cambia su valor por lo que su diferencial es cero (A1). El teorema A5 se puede obtener de manera análoga a A3, o bien, partiendo de $w = \frac{u}{v}$ para obtener $u = vw$ y aplicar entonces A4 para obtener du y de ahí despejar $dw = d\left(\frac{u}{v}\right)$.

A6. *Potencia de una variable*

$$d\,u^n = nu^{n-1}du$$

Prueba: si la variable u tiene un incremento du, entonces:

$$d(u^n) = (u + du)^n - u^n = \left[u\left(1 + \frac{du}{u}\right)\right]^n - u^n = u^n\left[1 + \frac{du}{u}\right]^n - u^n$$

Desarrollando la serie binomial, se obtiene:

$$d(u^n) = u^n \left[1 + n\,\frac{du}{u} + o(du^2)\right] - u^n = u^n + nu^{n-1}du + o(du^2) - u^n$$

$$d(u^n) = nu^{n-1}du + o(du^2)$$

Al conservar sólo el término principal se concluye la prueba. El teorema A7 se obtiene de A4 y A6, mientras que A8 se obtiene de A6 con $n = \frac{1}{2}$.

Aplicando estos 8 teoremas se puede calcular la diferencial de cualquier función algebraica.

Por ejemplo, si $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$, entonces:

$$dy = d\left(\sqrt{x^2 + 3x}\right) = \frac{d(x^2+3x)}{2\sqrt{x^2+3x}} \qquad \text{(por A8)}$$

$$dy = d\left(\sqrt{x^2 + 3x}\right) = \frac{d(x^2)+d(3x)}{2\sqrt{x^2+3x}} \qquad \text{(por A2)}$$

$$d\left(\sqrt{x^2 + 3x}\right) = \frac{2x\,dx+3\,dx}{2\sqrt{x^2+3x}} \qquad \text{(por A6 y A7)}$$

$$d\left(\sqrt{x^2 + 3x}\right) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}\,dx$$

Funciones trascendentes

Funciones trigonométricas directas (TD)

TD1 $\quad d(\operatorname{sen} u) = \cos u\; du$

Prueba: si la variable *u* tiene un incremento *du*, entonces:

$$d(\operatorname{sen} u) = \operatorname{sen}(u + du) - \operatorname{sen} u = \operatorname{sen} u \cos du + \cos u\; \operatorname{sen} du - \operatorname{sen} u$$

Considerando ahora que du es infinitesimal, tenemos que $\operatorname{sen} du = du$ y $\cos du = 1$, de manera que $d(\operatorname{sen} u) = \operatorname{sen} u + \cos u\, du - \operatorname{sen} u = \cos u\, du$.

TD2 se prueba de manera análoga, y el resto de los teoremas para las funciones trigonométricas directas se pueden probar con base en estos resultados y en algunas identidades trigonométricas.

Funciones trigonométricas inversas (TI)

TI1 $\quad d(\operatorname{arcsen} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$

Prueba: si $u = \operatorname{sen} v$, entonces $v = \operatorname{arcsen} u$ y si las variables u y v u y v tienen incrementos du y dv, respectivamente, entonces $du = d(\operatorname{sen} v) = \cos v\; dv$, de donde despejamos dv para obtener:

$$dv = \frac{du}{\cos v} = \frac{du}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 v}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$$

Es decir $dv = d(\operatorname{arcsen} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$

El resto de los teoremas relativos a las funciones trigonométricas inversas se prueban de manera similar, recurriendo a los teoremas TD y algunas identidades trigonométricas.

Funciones exponenciales y logarítmicas (EL)

Recordemos, primeramente, que la gráfica de una función exponencial definida mediante $y = f(x) = a^x$, con $a > 1$, es una curva creciente, que pasa por $(0,1)$. Además, para valores de a cada vez más próximos a 1, la curva se va haciendo "más horizontal", pareciéndose cada vez más a la recta $y = 1$, mientras que, para valores de a cada vez más grandes, la parte que queda del lado positivo de las x se hace cada vez "más vertical", aproximándose al eje y, tal como se muestra en la figura 1 (izquierda).

Podemos considerar entonces los casos extremos, el de $a = 1$, para el cual la gráfica es la recta $y = 1$ y a infinitamente grande ($a = \infty$), para el que la gráfica (para valores positivos de x) es el eje y que queda por arriba del origen.

Si ahora consideramos un cuadro infinitamente pequeño, con centro en $(0,1)$, se verá un conjunto de rectas, que son parte de las tangentes a las curvas en el punto $(0,1)$, como se muestra en la figura 1 (derecha). Para el caso extremo $a = 1$ se tendrá la recta $y = 1$, con pendiente 0, mientras que para $a = \infty$ se tendrá la recta $x = 0$, con pendiente infinita.

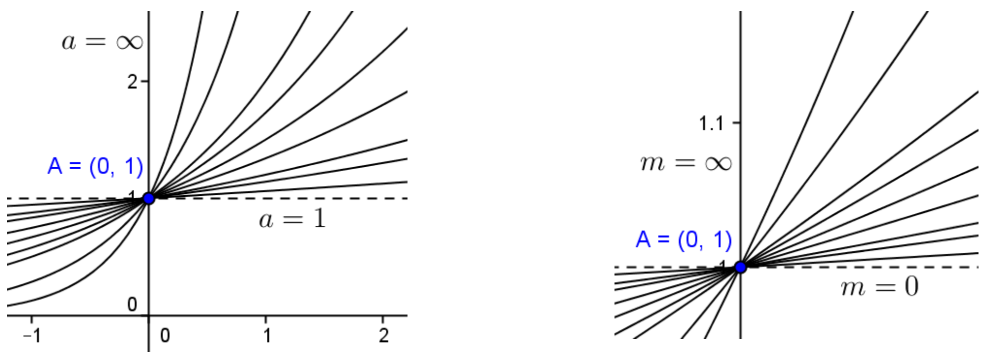

Figura 1

Si suponemos que la variación entre estos casos extremos se da en forma continua, entonces deberá haber una recta con pendiente igual a la unidad, para algún valor de a. El matemático suizo Leonhard Euler (a mediados del siglo XVIII) denotó con e al valor de a, para el cual, el valor de m es la unidad ($m = 1$).

Ahora bien, siendo $y = f(x) = a^x$, la parte de su gráfica infinitamente cerca del punto $(0,1)$ será una recta de pendiente m, y estos números (a y m) estarán relacionados entre sí (figura 2) de acuerdo con:

$$f(dx) = a^{dx} = 1 + TQ = 1 + m\,dx$$

Así pues, $a^{dx} = 1 + m\,dx$, y como $m = 1$ cuando $a = e$, tenemos que:

$$e^{dx} = 1 + dx \qquad (3)$$

Habiendo obtenido este resultado podemos, ahora sí, obtener la diferencial de la función exponencial. Así, considerando $y = f(x) = e^x$ entonces $d(e^x) = e^{x+dx} - e^x = e^x e^{dx} - e^x = e^x(e^{dx} - 1)$. Pero $e^{dx} = 1 + dx$ (ecuación 3), así que $d(e^x) = e^x(1 + dx - 1) = e^x dx$, lo que prueba el teorema EL1.

Por otra parte, si $u = e^w$, de manera que $w = \ln u$, y si las variables u y w tienen incrementos du y dw, respectivamente, entonces $du = e^w dw$ y al despejar dw se obtiene:

$$dw = d(\ln u) = \frac{du}{e^w} = \frac{du}{u}$$

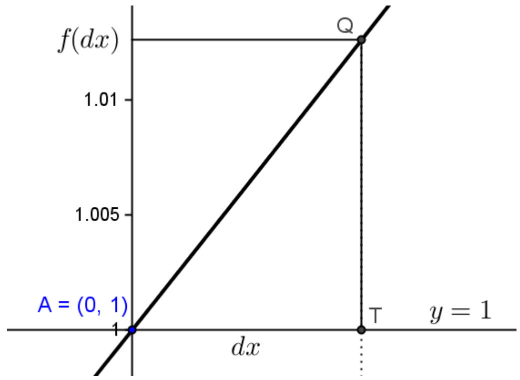

Figura 2

Con esto se demuestra el teorema EL3. Por último, EL4 se obtiene al aplicar un cambio de base en EL3. EL2 se obtiene a partir de EL4. Los teoremas relativos a las funciones hiperbólicas se obtienen a partir de las definiciones para $\operatorname{senh} u$ y $\cosh u$, así como las identidades correspondientes a esta familia de funciones.

Cabe mencionar que resulta conveniente ejercitarse en el cálculo de diferenciales, hasta asegurarse (con ayuda de una tabla como la que aquí se anexa) que se puede obtener la diferencial de cualquier expresión algebraica o trascendente. Aquí sólo se mostrarán, con dos ejemplos, los procedimientos correspondientes. En el primer caso se obtendrá la diferencial de una variable que se da en función de una segunda variable, y en el segundo se diferenciará una ecuación en dos variables, es decir, una de la forma $R_1(x, y) = R_2(x, y)$.

Para el primer ejemplo consideremos la función definida mediante $y = f(x) = \sqrt{9 - \cos^2 x}$, de manera que:

$$dy = d\left(\sqrt{9 - \cos^2 x}\right) = \frac{d(9-\cos^2 x)}{2\sqrt{9-\cos^2 x}} \qquad \text{(por A8)}$$

$$dy = \frac{d(9) - d(\cos^2 x)}{2\sqrt{9-\cos^2 x}} \qquad \text{(por A2)}$$

$$dy = \frac{0 - 2\cos x\, d(\cos x)}{2\sqrt{9-\cos^2 x}} \qquad \text{(por A1 y A6)}$$

$$dy = \frac{-2\cos x\,(-\operatorname{sen} x\, dx)}{2\sqrt{9-\cos^2 x}} \qquad \text{(por TD2)}$$

$$d\left(\sqrt{9 - \cos^2 x}\right) = \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{9-\cos^2 x}}\, dx$$

En general, si se tiene que $y = f(x)$, al calcular la diferencial se obtendrá una ecuación de la forma $dy = \phi(x)\, dx$.

Supongamos ahora que las variables x y y están relacionadas mediante la ecuación $e^{x/y} = 2x^2y^3$. Al calcular la diferencial en cada parte de la ecuación, se tendrá:

$$d\left(e^{x/y}\right) = d(2x^2y^3),$$

$$e^{x/y} d\left(\frac{x}{y}\right) = 2d(x^2y^3) \qquad \text{(por EL1 y A4)}$$

$$e^{x/y}\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}=2[x^2d(y^3)+y^3d(x^2)] \qquad \text{(por A5 y A3)}$$

$$e^{x/y}\frac{y\,dx}{y^2}-e^{x/y}\frac{x\,dy}{y^2}=2[x^2(3y^2dy)+y^3(2x\,dx)] \qquad \text{(por A6)}$$

$$\left(e^{x/y}\frac{1}{y}-4xy^3\right)dx+\left(-e^{x/y}\frac{x}{y^2}-6x^2y^2\right)dy=0$$

Si observamos el proceso podemos afirmar que, en general:

A partir de una ecuación de la forma $R(x,y)=0$, siempre se podrá obtener, calculando la diferencial en cada parte, y agrupando términos, una ecuación de la forma: $$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$	(4)

Esta ecuación es llamada *ecuación diferencial* porque involucra no sólo a las dos variables, sino además las diferenciales de las mismas. A partir de esta ecuación, cuando resulte necesario, se podría despejar $\frac{dy}{dx}$ o $\frac{dx}{dy}$, obteniendo con ello ecuaciones de la forma $\frac{dy}{dx}=F(x,y)$ o $\frac{dx}{dy}=G(x,y)$.

ANEXO. TEOREMAS PARA EL CÁLCULO DE DIFERENCIALES

Funciones algebraicas

A_1 $d(c) = 0$

A_2 $d(u \pm v \pm w) = du \pm dv \pm dw$

A_3 $d(uv) = u\, dv + v\, du$

A_4 $d(cu) = c\, du$

A_5 $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\, du - u\, dv}{v^2}$

A_6 $d(u^n) = nu^{n-1}du$

A_7 $d(cu^n) = cnu^{n-1}du$

A_8 $d(\sqrt{u}) = \frac{du}{2\sqrt{u}}$

Funciones trigonométricas (circulares) directas

TD_1 $d(\operatorname{sen} u) = \cos u\, du$

TD_2 $d(\cos u) = -\operatorname{sen} u\, du$

TD_3 $d(\tan u) = \sec^2 u\, du$

TD_4 $d(\cot u) = -\csc^2 u\, du$

TD_5 $d(\sec u) = \sec u \tan u\ \ du$

TD_6 $d(\csc u) = -\csc u \cot u\ \ du$

Funciones trigonométricas (circulares) inversas

TI_1 $d(\operatorname{arcsen} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$

TI_2 $d(\arccos u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$

TI_3 $d(\arctan u) = \frac{1}{1+u^2}du$

TI_4 $d(\operatorname{arccot} u) = -\frac{1}{1+u^2}du$

TI_5 $d(\operatorname{arcsec} u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}du$

TI_6 $d(\operatorname{arccsc} u) = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}du$

Funciones exponenciales y logarítmicas

EL_1 $d(e^u) = e^u du$

EL_2 $d(b^u) = b^u \ln b\, du$

EL_3 $d(\ln u) = \frac{1}{u}du$

EL_4 $d(\log_a u) = \frac{1}{u \ln a}du$

Funciones hiperbólicas directas

H_1 $d \operatorname{senh} u = \cosh u\ \ du$

H_2 $d \cosh u = \operatorname{senh} u\ du$

H_3 $d \tanh u = \operatorname{sech}^2 u\ du$ du

H_4 $d \coth u = -\operatorname{csch}^2 u\ du$

H_5 $d \operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u\ du$

H_6 $d \operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u \coth u\ \ du$

Funciones hiperbólicas inversas

HI_1 $d(\operatorname{asenh} u) = (u^2+1)^{-1/2}du$

HI_2 $d(\operatorname{acosh} u) = (u^2-1)^{-1/2}du$

HI_3 $d(\operatorname{atanh} u) = -(u^2-1)^{-1}du$