

APROXIMACIÓN Y GRAFICACIÓN

POLINOMIOS APROXIMANTES

Los polinomios son funciones que se evalúan y con las que se pueden hacer operaciones con relativa facilidad, razón por la cual fueron utilizados, desde los orígenes del cálculo, para aproximar las demás funciones normalmente utilizadas, tanto las algebraicas como las trascendentes. En este capítulo veremos cómo expresar ciertos tipos de funciones algebraicas como un *polinomio de grado infinito* al que se denominará *serie de potencias* de la función. Esto permitirá, entre otras cosas, aproximar el valor de la función para un valor dado de la variable, con tanta precisión como se desee y el instrumento de cálculo lo permita, evaluando para ello el polinomio aproximante correspondiente con el número suficiente de términos.

Para ello consideraremos algunos conceptos relativos a las series de potencias. Así pues, siendo f una función real, supongamos que existen constantes reales c_i ($i = 1, 2, 3, \dots$), tales que, para cada x en un determinado subconjunto de los números reales, que asumiremos que es un intervalo que contiene en su interior al cero, se tiene que:

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots \quad (1)$$

En tales condiciones se dirá que el segundo miembro de esta ecuación es el *desarrollo en serie de potencias* de f (alrededor de cero) en el intervalo.

Los puntos suspensivos al final del lado derecho de la ecuación indican que la suma continúa indefinidamente y que, sólo en tal caso, es decir, si el número de términos es infinito, se cumplirá la igualdad. Si el número de términos es finito, el lado derecho de (1) es un polinomio, que al ser evaluado para un valor dado de la variable proporcionará un valor aproximado de la función, obteniendo un error que se espera sea menor en cuanto mayor sea el número de términos considerado. Así pues, si se toma un número finito de términos y P_n es el polinomio:

$$P_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n \quad (2)$$

Entonces el *error absoluto* cometido al evaluar la función por medio de este polinomio, para un valor x de la variable, será:

$$e_a = |f(x) - P_n(x)| \quad (3)$$

Y el *error relativo* correspondiente:

$$e_r = \frac{e_a}{|f(x)|} = \left| \frac{f(x) - P_n(x)}{f(x)} \right| \quad (4)$$

Ahora bien, si para un valor dado de x , el error e_a puede hacerse tan pequeño como se quiera, haciendo n suficientemente grande, diremos que la serie $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$ *converge* para ese valor de x . En caso contrario se dirá que la serie *diverge*. Se sabe que, por lo general, la serie convergerá para toda x en un intervalo al que se denominará

intervalo de convergencia. Un polinomio como el expresado mediante (2) será llamado *polinomio aproximante* de grado n .

Por ejemplo, y como se verá más adelante, el desarrollo en serie de potencias de la función exponencial está dado por:

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \quad (5)$$

Dicha serie converge para todo valor de x . De esta manera, al hacer $x = 1$, la serie deberá converger a $e^1 = e$, es decir, el valor de $P_n(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!}$ deberá ser más próximo al de e conforme mayor sea el valor de n .

En la tabla 1 se muestra el valor de $P_n(1)$, lo mismo que los errores absoluto y relativo correspondientes, para algunos valores de n , y considerando que $e \cong 2.718281828$. Puede observarse que, efectivamente, el error disminuye conforme se incluyen más términos de la serie.

n	2	4	6	8	10
$P_n(1)$	2.5	2.70833	2.71806	2.71828	2.71828
e_a	0.218282	9.95×10^{-3}	2.26×10^{-4}	3.06×10^{-6}	2.84×10^{-8}
e_r	8%	0.37%	8.3×10^{-5}	1.13×10^{-6}	1×10^{-8}

Tabla 1

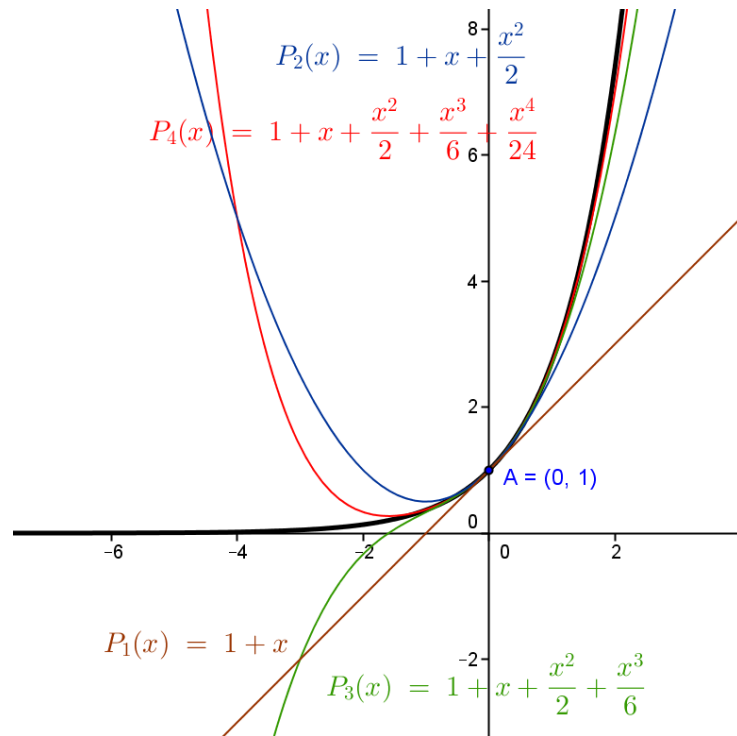


Figura 1

Por otra parte, a partir de la ecuación (5) obtenemos los polinomios aproximantes de grados 1, 2, 3 y 4:

$$P_1(x) = 1 + x,$$

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

$$\text{y} \quad P_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

En la figura 1 se muestra la gráfica de la función exponencial en negro y trazo grueso, y las de los polinomios aproximantes en trazo delgado y en colores. En esta gráfica podemos observar, por un lado, que los polinomios están “pegados” a la gráfica de la función alrededor del punto (0,1), correspondiente a $x = 0$, y que la gráfica del polinomio permanece “pegado” a la gráfica de la función, en una zona cada vez más amplia, alrededor de ese punto, a medida que el grado del polinomio es mayor.

SERIE BINOMIAL

Vamos a considerar ahora el desarrollo en serie de potencias de una función irracional. Particularmente interesará obtener el desarrollo en serie de una función definida mediante una raíz, siendo el radicando un binomio, el primero de cuyos términos es constante, y el segundo, un término que contiene a la variable.

El asunto es, entonces, cómo obtener el desarrollo en serie para una expresión de la forma $(a + b)^n$. En el caso que n sea un número natural, el resultado es conocido desde cursos anteriores: la potencia del binomio tiene $n + 1$ términos, el primero de los cuales es a^n y el último b^n ; en cada término aparece a elevado a una potencia que decrece de n a 0, y b , elevado a una potencia que crece de 0 a n . Los coeficientes se obtienen con el así llamado *triángulo de Pascal*. De esta manera sabemos que las potencias correspondientes a $n = 2, 3, 4$ y 5 están dadas por:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$\text{y} \quad (a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

En el siglo XVII esto era ampliamente conocido, y fue entonces cuando el matemático inglés Isaac Newton, al estudiar el problema de la cuadratura del círculo, obtuvo el desarrollo de la potencia para un exponente racional, descubriendo un patrón para la generación de los coeficientes, el cual se describe a continuación. Primeramente, escribamos la última de las ecuaciones anteriores como sigue:

$$(a + b)^5 = a^5 + \frac{5}{1}a^4b + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}a^3b^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^2b^3 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}ab^4 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}b^5$$

Ahora observemos que en el numerador aparece, a partir del segundo término, el factor 5, que es el exponente del binomio, y que en cada uno de los términos subsecuentes aparecen como factores, sus enteros antecesores, 4, 3, ... En el denominador, en cambio, aparece el 1 a partir del segundo término, y se mantiene en los subsecuentes, multiplicado por sus enteros siguientes, 2, 3, ... Así pues, para $n = 5$, los coeficientes pueden obtenerse como sigue:

$$c_1 = \frac{5}{1} = \frac{n}{1}$$

$$c_2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

$$c_3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$c_4 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$c_5 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

Ahora consideremos el caso general, es decir, la n -ésima potencia:

$$(a + b)^n = a^n + c_1 a^{n-1} b + c_2 a^{n-2} b^2 + c_3 a^{n-3} b^3 + \dots$$

En la cual se han indicado los coeficientes desconocidos mediante $c_1, c_2, \dots$

De acuerdo con el patrón descrito anteriormente, el desarrollo estará dado por:

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \dots$$

O bien, por:

$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \dots$	(6)
--	-----

Obsérvese que, si n no es natural, el segundo miembro de esta última ecuación contiene una infinidad de términos, debido a que nunca se cancela el numerador, como sucede cuando n es natural, pues en tal caso, en el término $n + 1$ aparece $n - n = 0$ como factor en el numerador, por lo que los coeficientes c_k se anulan para $k \geq n + 1$. Así pues, si n no es natural, la ecuación (6) da un desarrollo en serie para la potencia del binomio, razón por la cual se llamará *serie binomial*.

Consideremos ahora un caso particular muy importante, aquel que se obtiene cuando $a = 1$ y $b = w$. En tal caso $a^k = 1^k = 1$, de manera que, al hacer las sustituciones correspondientes en (6) obtenemos:

$$(1 + w)^n = 1 + \frac{n}{1} w + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} w^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} w^3 + \dots$$

Puede demostrarse que esta *serie binomial*, converge sólo para $|w| < 1$, es decir, para $-1 < w < 1$. En resumen:

$(1 + w)^n = 1 + nw + \frac{n(n-1)}{2!} w^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} w^3 + \dots \quad -1 < w < 1$	(7)
--	-----

Esta es la expresión que más frecuentemente se utiliza en los textos de ciencias básicas y de la ingeniería. Por ejemplo, si $y = f(x) = \sqrt[3]{8 + 3x} = (8 + 3x)^{1/3}$ escribimos primero el 8 como factor común, para obtener la forma indicada en (7). De esta manera:

$$y = f(x) = \sqrt[3]{8 + 3x} = (8 + 3x)^{1/3} = \left[8 \left(1 + \frac{3}{8} x \right) \right]^{1/3} = 2 \left(1 + \frac{3}{8} x \right)^{1/3}$$

Y al comparar con (2.9) observamos que $w = \frac{3}{8}x$ y $n = \frac{1}{3}$, por lo que, al hacer las sustituciones necesarias se obtiene:

$$y = 2 \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{8}x \right) + \frac{(1/3)(-2/3)}{2!} \left(\frac{3}{8}x \right)^2 + \frac{(1/3)(-2/3)(-5/3)}{3!} \left(\frac{3}{8}x \right)^3 + \dots \right]$$

$$y = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{32}x^2 + \frac{5}{768}x^3 - \dots$$

$$f(x) = \sqrt[3]{8+3x} \cong 2 + 0.25x - 0.03125x^2 + 0.0065104x^3 + \dots$$

Para obtener el intervalo de convergencia, tenemos que $-1 < \frac{3}{8}x < 1$, $-\frac{8}{3} < x < \frac{8}{3}$, así que dicho intervalo es $\langle -\frac{8}{3}, \frac{8}{3} \rangle \cong \langle -2.666667, 2.666667 \rangle$.

Consideremos ahora los polinomios de grados 1, 2 y 3:

$$P_1(x) = 2 + \frac{1}{4}x,$$

$$P_2(x) = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{32}x^2,$$

y $P_3(x) = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{32}x^2 + \frac{5}{768}x^3$

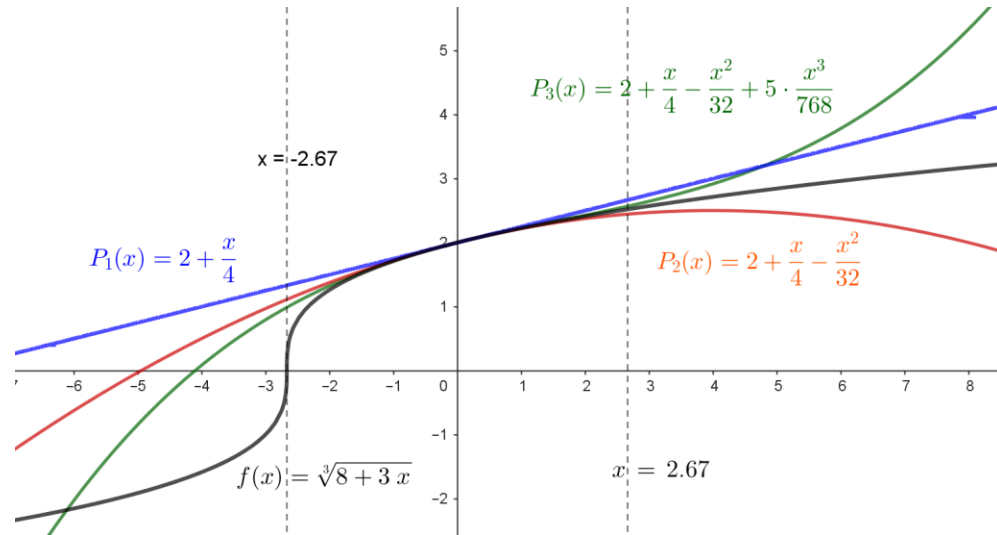


Figura 2

En la figura 2 se muestran las gráficas de la función $f(x) = \sqrt[3]{8+3x}$, así como de los tres polinomios aproximantes obtenidos, además de las rectas $x = -\frac{8}{3} \cong -2.67$ y $x = \frac{8}{3} \cong 2.67$, que definen los extremos de la zona de convergencia.

Para observar la convergencia aritméticamente consideremos un valor particular de la variable, dentro del intervalo de convergencia, por ejemplo $w = 0.2$, para el cual se obtiene

$$f(0.2) = 2 + \frac{1}{4}(0.2) - \frac{1}{32}(0.2)^2 - \frac{5}{768}(0.2)^3 - \dots$$

Los valores de las sumas parciales, correspondientes a $k = 1, 2$ y 3 , se muestran en la tabla 2.3, así como los correspondientes errores absoluto y relativo, considerando que el valor de $f(0.2)$ (reteniendo en la lectura de la calculadora 7 cifras después del punto) es $f(0.2) = \sqrt[3]{8+3(0.2)} = \sqrt[3]{8.6} \cong 2.0487996$.

n	1	2	3
$P_n(0.2)$	2.05	2.04875	2.0488021
e_a	1.2×10^{-3}	4.96×10^{-5}	2.5×10^{-6}
e_r	5.9×10^{-4}	2.4×10^{-5}	1.2×10^{-6}

Tabla 2

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

En las ciencias básicas y de la ingeniería hay dos situaciones en las que el concepto de continuidad resulta sumamente importante. La primera tiene lugar cada vez que se considera, por ejemplo, una pieza metálica como llena totalmente de materia, sin huecos, aun cuando a niveles microscópicos la materia no ocupe totalmente todo el espacio. En estos casos, la suposición de la pieza como un medio continuo de materia es útil para la obtención de algunos resultados cuya validez importa sólo en una escala macroscópica.

La segunda situación se presenta cuando se supone que una pequeña variación en alguna de las variables que intervienen en un fenómeno produce variaciones, también pequeñas, en el resto de ellas. En tal caso diremos que las variables presentan una variación continua. Al suponer que esta situación se conserva, aún a niveles infinitesimales, se llega a la siguiente definición:

En una función continua, a un cambio (incremento) infinitesimal de la variable le corresponde un cambio también infinitesimal de la función.

Así, si consideramos una función $f(x)$ y suponemos que la variable cambia su valor de x a $x + dx$, tendremos que:

Una función f es continua para cada valor x de la variable, si: $f(x + dx) = f(x) + \text{infinitesimal}$	(8)
--	-----

Puede probarse que todas las familias de funciones de uso común en las ciencias básicas y de la ingeniería son continuas en todo su dominio. Lo importante por el momento será saber cómo identificar cuando se presenta alguna forma de discontinuidad, es decir, alguna interrupción en el trazo de la gráfica de una función.

GRAFICACIÓN DE FUNCIONES. ASÍNTOTAS

En las ciencias de la ingeniería, en cada situación en la que intervienen dos cantidades variables, es muy importante tener distintas maneras de expresar la relación que se da entre ellas, ya sea simbólica o algebraica, gráfica o geométrica, o bien por medio de una descripción verbal. Y es igualmente importante poder “traducir” esa información de una de estas maneras de expresión a otra.

En esta unidad atenderemos de manera especial el problema de hacer una representación gráfica cuando la relación entre las variables está dada en forma simbólica, particularmente

cuando la relación es una función y la regla de correspondencia implica un cociente de dos expresiones en la variable.

Funciones definidas por cocientes. Asíntota vertical. Con referencia en la figura 3, supondremos que la función tiene asíntotas verticales en $x = a$, $x = b$, $x = c$ y $x = d$, de manera que, en cada caso, si x está “muy cerca” de a , entonces $f(x)$ es “muy grande” (ya sea positiva o negativa). Así pues, si x está infinitamente cerca de a , $f(x)$ resulta ser infinitamente grande (en valor absoluto). Esta será la condición para la existencia de una asíntota vertical.

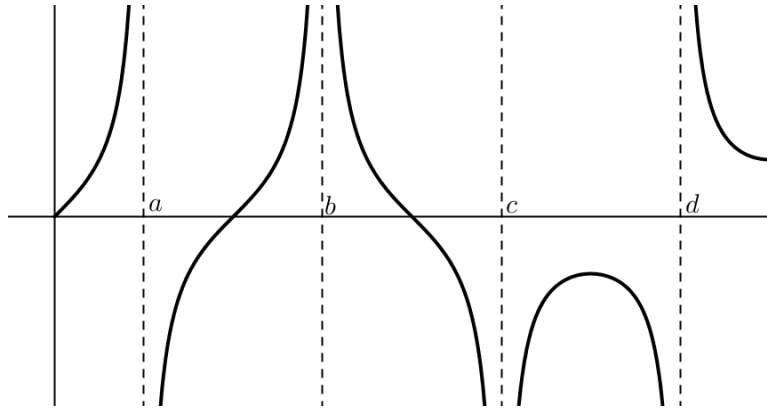


Figura 3

En el caso de una función racional, como $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, por ejemplo, sabemos que esta tiene una asíntota vertical en $x = -\frac{d}{c}$ y que para ese valor de la variable el denominador se anula, pero el numerador no. Vamos a ver que esta es una condición general que nos sirve para identificar la existencia de una asíntota vertical.

Supongamos, pues, que f es una función definida por $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, siendo P y Q funciones continuas en todo su dominio, y, en particular, en $x = a$, de manera que $f(a + x) = \frac{P(a+dx)}{Q(a+dx)} = \frac{P(a)+k_p dx+o(dx^2)}{Q(a)+k_q dx+o(dx^2)}$. Si $Q(a) = 0$ y $P(a) \neq 0$, entonces $f(a + x) = \frac{P(a+dx)}{Q(a+dx)} = \frac{P(a)+k_p dx+o(dx^2)}{k_q dx+o(dx^2)} = \frac{P(a)}{k_q dx}$.

Observemos entonces que $P(a)$ es un número real (cantidad finita), mientras que $k_q dx$ es infinitesimal, por lo que $f(a + dx)$ es infinitamente grande, así que f tiene una asíntota vertical en $x = a$. En resumen:

Si f es una función definida por $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde P y Q son funciones continuas en $x = a$, si $Q(a) = 0$ y $P(a) \neq 0$, entonces f tiene una asíntota vertical en $x = a$.	(9)
--	-----

Por ejemplo, si f es la función definida por $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$, vemos que el denominador se anula para $x = -2$ y $x = 2$, y que el numerador no se anula para ninguno de esos valores

de la variable. Por lo tanto, la gráfica de f tiene una asíntota vertical en $x = -2$ y otra en $x = 2$. Recurriendo a una tabulación y teniendo en cuenta todo lo anterior, podemos trazar la gráfica de f , que se muestra en la figura 4.

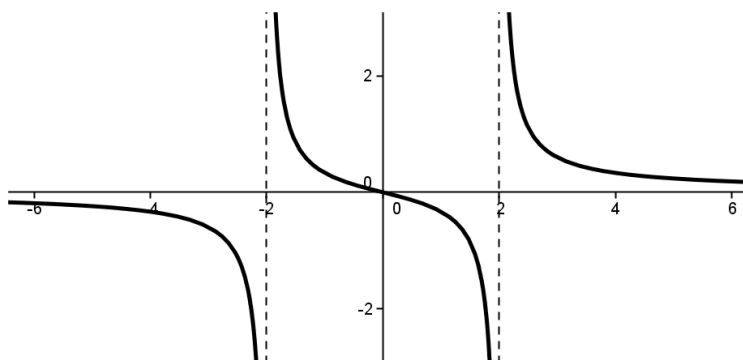


Figura 4

Para verificar el comportamiento de una función definida por medio de un cociente, alrededor de algún número para el cual el denominador se anula, podemos utilizar lo que vimos en el capítulo anterior, respecto de las operaciones con infinitesimales y la obtención del término principal. Veamos ahora otra situación de interés para este tipo de funciones.

Asíntotas horizontales, oblicuas y curvas. En el curso de geometría analítica de bachillerato se indicaba cuándo una recta es asíntota de una curva:

“Si para una curva dada, existe una recta tal que, a medida que un punto de la curva se aleja indefinidamente del origen, la distancia de ese punto a la recta decrece continuamente y tiende a cero, dicha recta se llama *asíntota* de la curva”.

Así pues, podemos decir que la situación que debe presentarse entre dos curvas, para que una de ellas sea una asíntota de la otra, es que las curvas estén cada vez más próximas entre sí conforme un punto sobre alguna de ellas se aleje de algún lugar de referencia. Eso es lo que podemos observar en los tres pares de curvas que se muestran en la figura 5, en donde cada una de las curvas “ g ” representa una asíntota de cada curva “ f ”.

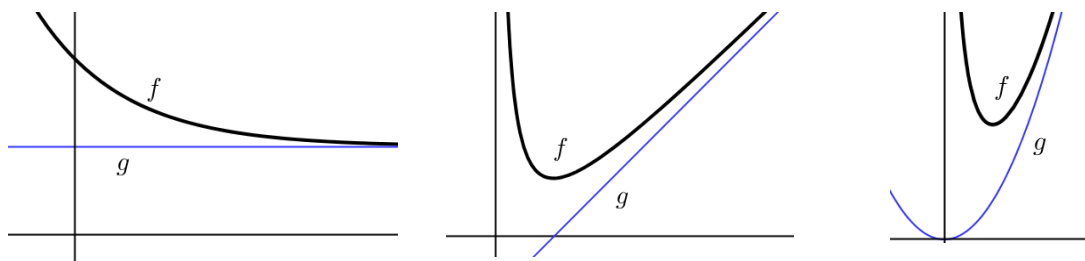


Figura 5

Ahora bien, la proximidad entre dos curvas se puede medir de varias maneras, una de las cuales es la distancia entre los puntos de la curva que se encuentran sobre una misma recta paralela al eje y , en cuyo caso la distancia entre las curvas, correspondiente a la recta $x =$

a , sería $\delta = f(a) - g(a)$, o bien, $\delta = g(a) - f(a)$ si g queda por encima de f . A partir de lo anterior se propone la siguiente definición:

La gráfica de una función g es una <i>asíntota</i> de la gráfica de otra función f , si para N infinitamente grande, $f(N) - g(N)$ es infinitesimal, es decir, si: $f(N) = g(N) + \text{infinitesimal}$	(10)
--	------

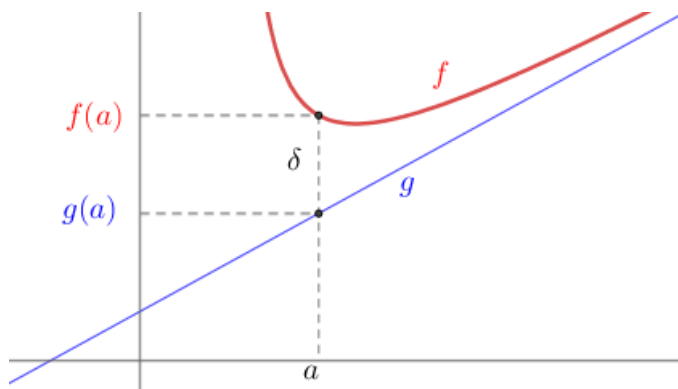


Figura 6

Así pues, para obtener una asíntota de la gráfica de una función dada f , se obtiene una expresión para $f(N)$ (preferentemente como una suma de potencias de N), con N infinitamente grande. Si es posible escribir tal expresión en la forma $f(N) = g(N) + \text{infinitesimal}$, entonces la gráfica de $y = g(x)$ será una asíntota de f .

Funciones definidas por cocientes. El denominador crece más rápido. Si una función está definida por medio de un cociente, por ejemplo $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ y si para x infinitamente grande, el término principal de h es de orden mayor al de g , entonces el cociente (y por lo tanto la función f) se hará infinitamente pequeño, de manera que la gráfica de f se acercará asintóticamente al eje x .

En particular, si f es una función racional propia, tenemos que $f(x) = \frac{a_0x^n + \dots + a_n}{b_0x^m + \dots + b_n}$, con $n < m$, por lo que, siendo N infinitamente grande, y conservando en cada parte de la fracción sólo el término principal, se tiene que:

$$f(N) = \frac{a_0N^n}{b_0N^m} = \frac{a_0/b_0}{N^{m-n}} = \text{infinitesimal} = 0 + \text{infinitesimal}$$

Es decir:

Si f es una <i>función racional propia</i> , entonces una asíntota de la gráfica de f es la recta $y = 0$ (eje x).	(11)
---	------

Por ejemplo, si f es la función definida mediante $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, entonces su dominio es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Debe excluirse a -1 y a 1 porque el denominador se anula para tales valores de la variable. Ahora bien, ya que el numerador no se anula para ninguno de estos valores,

entonces la gráfica de f tiene asíntotas verticales en $x = -1$ y $x = 1$. Además, observamos que no hay intersecciones con el eje x y que f es una función par, así que su gráfica es simétrica respecto del eje y .

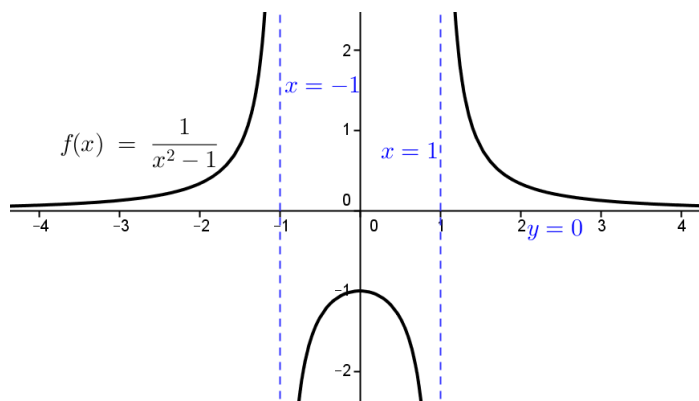


Figura 7

Finalmente, ya que se trata de una función racional propia, tenemos que otra asíntota de la gráfica de f es la recta $y = 0$ (eje x). Con toda esta información, podemos trazar la gráfica de f , la cual se muestra en la figura 7.

Funciones definidas por cocientes. Numerador y denominador crecen igualmente rápido. Si una función está definida por medio de un cociente, y si el término principal del numerador y el del denominador son del mismo orden, cuando la variable es infinitamente grande, entonces el término principal del cociente será el número real que es el cociente de los coeficientes principales de numerador y denominador.

En particular, si f es una función racional impropia, siendo el numerador y el denominador polinomios con el mismo grado, digamos que:

$$f(x) = \frac{p_0x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_{n-1}x + p_n}{q_0x^n + q_1x^{n-1} + \dots + q_{n-1}x + q_n}$$

Entonces, cuando x toma valores infinitamente grandes, tendremos que $f(N) = \frac{p_0N^n}{q_0N^n} = \frac{p_0}{q_0}$, así que el valor de la función, para valores infinitamente grandes de la variable (positivos o negativos) será infinitamente próximo al de $\frac{p_0}{q_0}$. En resumen:

Si f es una <i>función racional impropia</i> , definida mediante $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ siendo P y Q polinomios del mismo grado, entonces una asíntota de la gráfica de f es la recta horizontal $y = \frac{p_0}{q_0}$, siendo p_0 y q_0 los coeficientes principales de P y Q , respectivamente.	(12)
--	------

Por ejemplo, si f es la función definida mediante $f(x) = \frac{2x^2 - 2}{x^2 + 1}$, entonces observamos, primeramente, que el denominador no se hace cero para ningún valor de la variable, por lo que no se presenta ningún tipo de discontinuidad y la gráfica constará de una sola pieza.

Por otra parte, se trata de una función racional impropia en la que el numerador y el denominador son polinomios de segundo grado en la que los coeficientes de los términos principales son 2 (en el numerador) y 1 (en el denominador), por lo que se tiene una asíntota horizontal en $y = \frac{2}{1} = 2$. Con esta información y una breve tabulación se puede hacer el trazo de la curva, como se muestra en la figura 8.

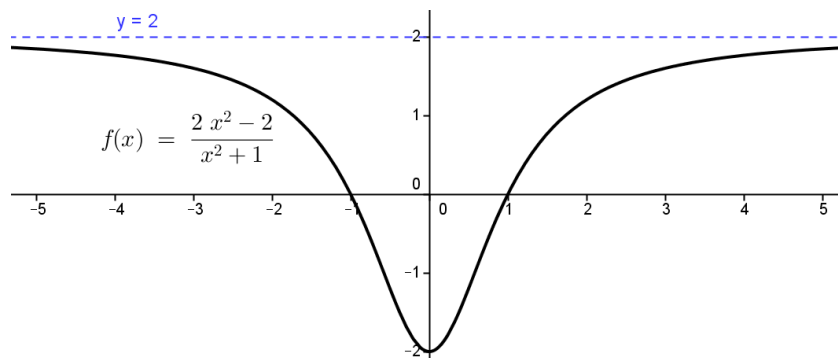


Figura 8

Funciones definidas por cocientes. El numerador crece más rápido. Si el numerador crece más rápido que el denominador cuando la variable se hace infinitamente grande, entonces el cociente se hará también infinitamente grande. El asunto es: ¿de qué manera?

Supongamos que se trata de una función racional impropia, definida por $f(x) = \frac{P(x)}{D(x)}$, donde el grado de P es mayor que el de D . En tal caso, si se aplica el algoritmo de la división de polinomios, y se obtiene Q como cociente y R como residuo, se tendrá entonces que $f(x) = \frac{P(x)}{D(x)} = \frac{Q(x) \cdot D(x) + R(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$, donde el grado de R es menor que el de D , de manera que $\frac{R(x)}{D(x)}$ es una fracción propia. Así pues, siendo N infinitamente grande, tendremos que $f(N) = Q(N) + \frac{R(N)}{D(N)} = Q(N) + \text{infinitesimal}$. Por lo tanto:

Si f es una <i>función racional impropia</i> , definida por $f(x) = \frac{P(x)}{D(x)}$, entonces una asíntota de f es la gráfica de $y = Q(x)$, siendo Q el cociente que resulta de dividir P entre D .	(13)
---	------

Por ejemplo, consideremos la función F definida mediante $y = F(x) = \frac{x^2}{2x-1}$. Tenemos pues, en este caso, que el dominio de la función es $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$. En $x = \frac{1}{2}$ el denominador se anula pero el numerador no, por lo que se tiene una asíntota vertical en $x = \frac{1}{2}$. Además, la única intersección de la gráfica de F con los ejes coordenados es el origen.

Ahora bien, al dividir x^2 entre $2x - 1$, se obtiene $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ como cociente y $\frac{1}{4}$ como residuo, así que $y = F(x) = \frac{x^2}{2x-1} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1/4}{2x-1}$. Por lo tanto, otra asíntota de la gráfica de F es

la recta $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$. Con esta información, trazamos la gráfica de F , la cual se muestra en la figura 9.

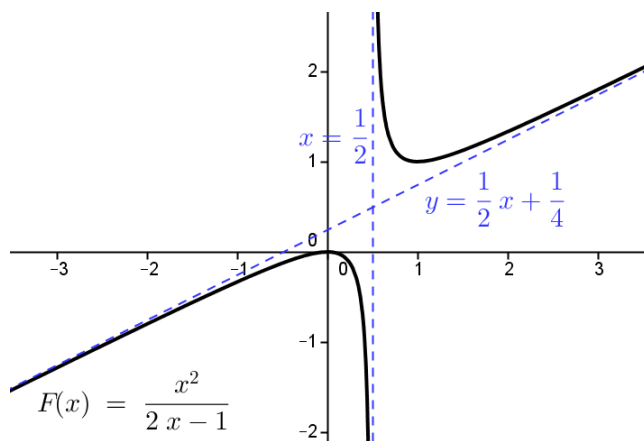


Figura 9

GRAFICACIÓN DE FUNCIONES. AGUJEROS

Sea f la función continua cuya gráfica se muestra en la figura 10 (izquierda), y sea g la función que resulta de quitar el par $(a, f(a))$ de f .

La gráfica de g será entonces idéntica a la de f , exceptuando el punto $(a, f(a))$, en cuyo lugar quedará un hueco (figura 10, derecha).

Recordemos ahora que $\frac{cx}{cy} \equiv \frac{x}{y}$ siempre que $c \neq 0$, de manera que $\frac{k(x-a)}{x-a} \equiv k$, siempre que $x \neq a$. Así pues, si f es una función continua y queremos “agujerarla” en $x = a$, definimos $g(x) = \frac{f(x)(x-a)}{x-a}$.

De esta manera, $g(x) \equiv f(x)$ para toda $x \neq a$, mientras que $g(a)$ no está definida, es decir, el punto $(a, f(a))$ no está en la gráfica de g . En otras palabras, la gráfica de g es la de f con un hueco en $x = a$, tal y como ocurre con las funciones cuyas gráficas se muestran en la figura 10.

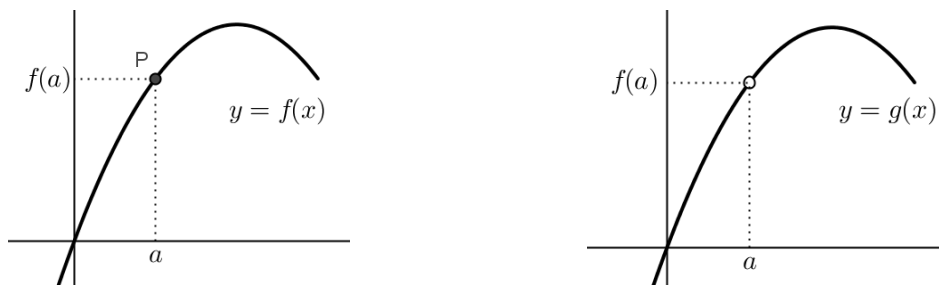


Figura 10

Por ejemplo, si $f(x) = x^2 - 1$, y se define g por $g(x) = \frac{(x^2-1)(x-2)}{x-2}$, entonces $g(x) \equiv f(x)$ para toda $x \neq 2$ y $g(2)$ no existe, mientras que $f(2) = 3$. Así pues, la gráfica de g es la parábola de ecuación $y = x^2 - 1$ (figura 11), con un hueco en $(2,3)$.

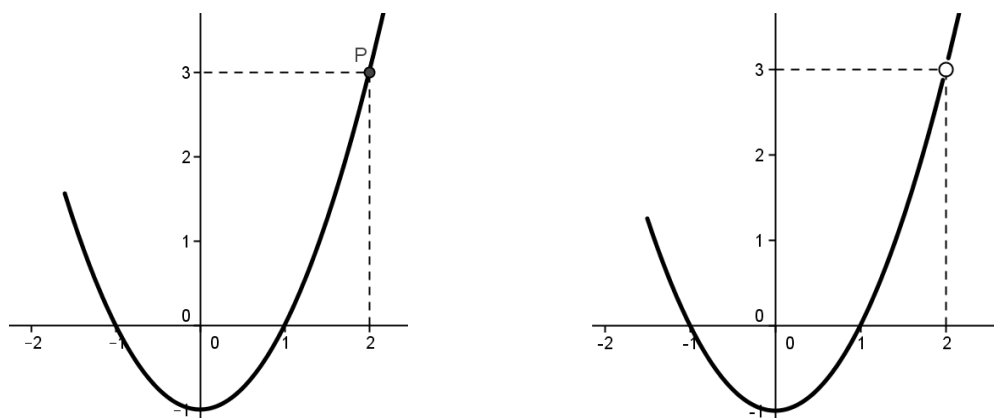


Figura 11

Ya que el hueco “aparece” como consecuencia de multiplicar y dividir por el binomio $x - a$, entonces, cuando se trata de una función racional, una condición necesaria para que la función presente de un hueco en $x = a$ es que el binomio $x - a$ sea factor común del numerador y el denominador de la fracción.

Es decir, si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ y $P(a) = Q(a) = 0$, entonces cada una de los polinomios P y Q tienen a $x - a$ como factor, así que $P(x) = (x - a)P_1(x)$ y $Q(x) = (x - a)Q_1(x)$, por lo que $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x-a)P_1(x)}{(x-a)Q_1(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, con $x \neq a$.

En caso de que $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ sea continua en $x = a$, es decir que $Q_1(a) \neq 0$, se tendrá que $f(x) \equiv \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = g(x)$, para toda $x \neq a$ así que la gráfica de f presentará un hueco en lugar del punto $(a, g(a))$. En resumen:

Si una función f está definida por un cociente de funciones continuas en $x = a$, si tanto el denominador como el numerador se anulan en a , y si f es idéntica a otra función g (que es continua en a), excepto en a , entonces f tiene una <i>discontinuidad de hueco</i> en $x = a$ y su gráfica es la misma que la de g , pero con un hueco en $(a, g(a))$.	(14)
--	------

Por ejemplo, si f es la función definida por medio de $f(x) = \frac{x^3-4x^2+3x}{2x^2-8x+6}$, entonces debemos determinar, primeramente, los valores de la variable para los cuales el denominador se anula. Así pues, tenemos que $2x^2 - 8x + 6 = 0$ si $x^2 - 4x + 3 = 0$, es decir, si

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}, \quad x = 1 \text{ o } x = 3$$

Si $x = 1$, entonces el numerador de f es $(1)^3 - 4(1)^2 + 3(1) = 0$, así que $x - 1$ debe ser un factor de ambas partes de la fracción. Al factorizar considerando esto, obtenemos que:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{2x^2 - 8x + 6} = \frac{x(x^2 - 4x + 3)}{2(x^2 - 4x + 6)} = \frac{x(x-1)(x-3)}{2(x-1)(x-3)}$$

Vemos, además, que ya no hace falta examinar lo que ocurre con $x = 3$, ya que $x - 3$ también es un factor de ambas partes de la fracción. Así pues, tenemos que $f(x) = \frac{x}{2}$, siempre que $x \neq 1$ y $x \neq 3$.

Tenemos entonces que la gráfica de f es la recta $y = \frac{1}{2}x$, con dos agujeros, uno en lugar del punto $(1, \frac{1}{2})$ y otro en lugar de $(3, \frac{3}{2})$. Su gráfica se muestra en la figura 12.

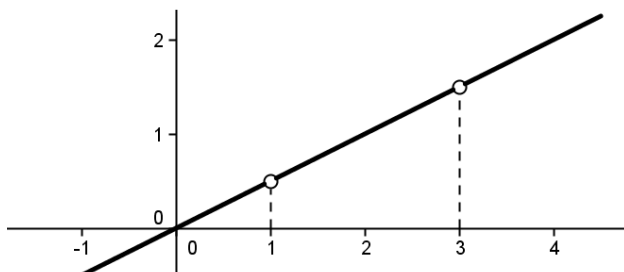


Figura 12

Forma indeterminada “cero entre cero”. Cuando se analiza una función definida mediante $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ y se sabe que $P(a) = Q(a) = 0$, podremos afirmar que la función presenta una discontinuidad de hueco *sólo* si podemos asegurar que f es idéntica a otra función g , excepto en a , y que esta función g es continua en a . Si no podemos establecer esta otra condición no podremos asegurar que la gráfica presenta el hueco. Así pues:

Si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ y si $P(a) = Q(a) = 0$ y no se tiene más información, no podrá afirmarse nada acerca del comportamiento de la función alrededor de a . En este caso diremos que se presenta la *forma indeterminada* $\frac{0}{0}$.

Por ejemplo, si consideramos las funciones $f_1(x) = \frac{x^2}{2x}$, $f_2(x) = \frac{3x^2}{5x^2}$ y $f_3(x) = \frac{5x^2}{x^3}$, observamos que cada numerador y cada denominador se anulan para $x = 0$. Sin embargo, para $x \neq 0$ $f_1(x) = \frac{x}{2}$, $f_2(x) = \frac{3}{5}$ y $f_3(x) = \frac{5}{x}$, de manera que la gráfica de f_1 es una recta con pendiente $\frac{1}{2}$ y un hueco en el origen y la de f_2 es una recta horizontal con un hueco en $(0, \frac{3}{5})$, mientras que la de f_3 es una hipérbola con asíntota vertical en $x = 0$.

DEFINICIÓN Y CÁLCULO DE LÍMITES

El concepto de límite (de una función en un punto) puede utilizarse en las ciencias básicas y de la ingeniería, particularmente para definir razones instantáneas de cambio, como la rapidez o la aceleración, pero también para definir algunas propiedades físicas cuando su valor depende de la posición en el espacio o en el plano.

Para las situaciones de interés en las ciencias básicas y de la ingeniería, este concepto busca responder a la siguiente cuestión: si la variable toma valores cada vez más próximos a un valor dado, ¿cuál es el número real hacia el cual se acerca el valor de la función?, lo que resulta particularmente importante para averiguar si la gráfica de una función presenta un agujero.

En efecto, si una función f tiene un agujero en $x = a$ quiere decir que f es idéntica a otra función continua g , excepto en $x = a$, y en tal caso la gráfica de f es idéntica a la de g , con un agujero en lugar del punto $(a, g(a))$.

También quiere decir que, si el valor de x está infinitamente cerca al número a , entonces el valor de $f(x)$ estará infinitamente próximo a $g(a)$, pero $f(a)$ permanecerá indefinido.

Considerando entonces una función definida mediante $y = f(x)$, interesa saber qué pasa con el valor de $f(x)$ conforme x toma valores infinitamente próximos a un cierto número (real) a . Si la respuesta es que el valor de $f(x)$ es L , entonces diremos que el límite de la función f , cuando x tiende a a es L , lo cual se denotará:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad (15)$$

Si además se tiene que $f(a)$ está indefinida, la gráfica de f presentará un agujero en lugar del punto (a, L) . Así pues, se propone la siguiente definición:

Decimos que el límite de una función f en a es L , si para α infinitesimal:	
$f(a + \alpha) = L + \beta$ con β infinitesimal	(16)
En tal situación, la gráfica de f presentará un agujero en lugar del punto (a, L) .	

Por ejemplo, si $f(x) = \frac{x^2-x-6}{2x+4}$, observamos que el denominador se anula para $x = -2$, y que el numerador también se anula. Así pues, podemos factorizar para obtener $f(x) = \frac{x^2-x-6}{2x+4} = \frac{(x-3)(x+2)}{2(x+2)} = \frac{x-3}{2}$, con $x \neq -2$.

Como lo que interesa es saber qué ocurre con el valor de $f(x)$ cuando x está infinitamente cerca de -2 , pero $x \neq -2$. Así pues, podemos decir que:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-x-6}{2x+4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-3}{2} = -\frac{5}{2}$$

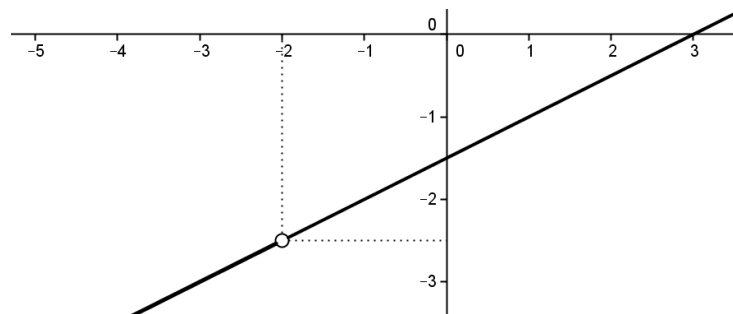


Figura 13

Este resultado nos dice también que la gráfica de la función dada es la recta $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$, con un agujero en lugar del punto $(-2, -\frac{5}{2})$, la cual se muestra en la figura 13.

Cuando se trata de una función racional, y verificamos que se presenta una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ para $x = a$, entonces tendremos a $x - a$ como factor en ambas partes de la fracción, tal como lo hicimos en el ejemplo anterior. Si tenemos otro tipo de función, no podremos proceder de la misma manera y habrá que ver qué hacer en cada caso para “eliminar” la indeterminación.

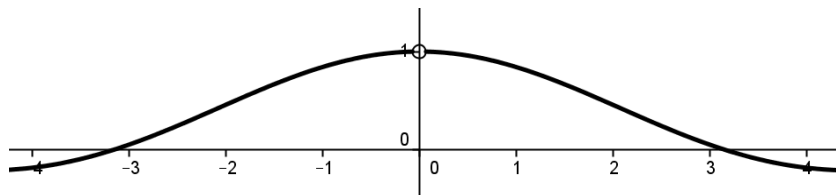


Figura 14

Por ejemplo, observemos que la función $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ presenta una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ en $x = 0$, por lo que cabe preguntarse por el límite de tal función cuando x tiende a cero. Ahora bien, sabemos que, si α es infinitesimal, entonces $\text{sen } \alpha = \alpha$, o, más precisamente $\text{sen } \alpha = \alpha + o(\alpha^2)$. Así pues, de acuerdo con 17, tenemos que:

$$f(0 + \alpha) = f(\alpha) = \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} = \frac{\alpha + o(\alpha^2)}{\alpha} = 1 + o(\alpha) = 1 + \text{infinitesimal}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 \quad (17)$$

Además, la gráfica de f presenta un agujero en lugar del punto $(0, 1)$, tal como se muestra en la figura 14.

Sabemos que una función f es continua para el valor a de la variable, si:

$$f(a + dx) = f(a) + \text{infinitesimal}$$

Y que este infinitesimal será del mismo orden que dx o mayor, de manera que el valor de $f(a + dx)$ se podrá escribir por medio de:

$$f(a + dx) = f(a) + k_1 dx + k_2 dx^2 + k_3 dx^3 + \dots$$

En donde cada una de las constantes k_j es un número real.

Si conservamos sólo el término de primer orden, podemos escribir:

$$f(a + dx) = f(a) + k_1 dx + o(dx^2) + \dots$$

Si conservamos, incluso término de segundo orden, tendríamos:

$$f(a + dx) = f(a) + k_1 dx + k_2 dx^2 + o(dx^3) + \dots$$

Como veremos, en ocasiones será necesario conservar uno o más términos, luego del término lineal.

Cálculo de límites y series de potencias

Cuando se calculan límites puede resultar conveniente utilizar series de potencias para eliminar la indeterminación. Por ejemplo, si consideramos la función definida por $f(x) = \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x}}$, observemos que, para $x = 1$, el denominador y el numerador se anulan, por lo que se tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, así que conviene entonces preguntarse por el límite de la función cuando $x \rightarrow 1$.

Si recurrimos a la serie binomial, tenemos que:

$$f(1 + \alpha) = \frac{1-(1+\alpha)^{1/3}}{1-(1+\alpha)^{1/4}} = \frac{1-\left(1+\frac{1}{3}\alpha+o(\alpha^2)\right)}{1-\left(1+\frac{1}{4}\alpha+o(\alpha^2)\right)} = \frac{-\frac{1}{3}\alpha+o(\alpha^2)}{-\frac{1}{4}\alpha+o(\alpha^2)} = \frac{-\frac{1}{3}\alpha}{-\frac{1}{4}\alpha} = \frac{4}{3} + \text{infinitesimal}$$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x}} = \frac{4}{3}$ y la gráfica de f presenta un agujero en lugar del punto $\left(1, \frac{4}{3}\right)$, como se observa en la figura 15.

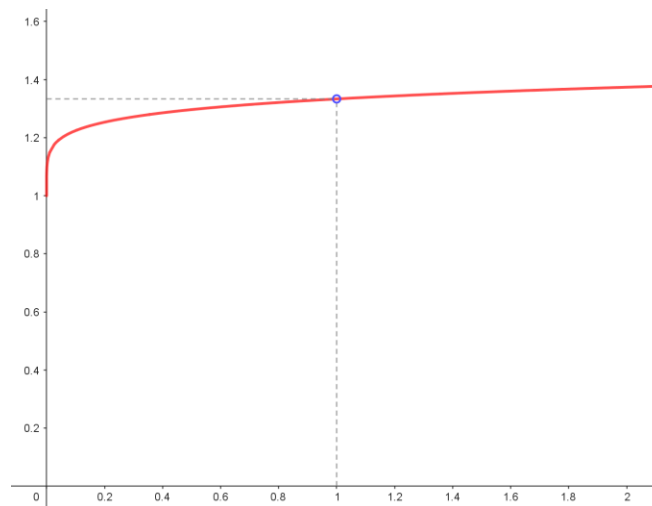


Figura 15