# TRABAJANDO CON CANTIDADES GRANDES Y PEQUEÑAS

## 1. CANTIDADES CONSTANTES, VARIABLES Y VARIABLES QUE SE CONSIDERAN CONSTANTES

Antes de comenzar a ver cómo trabajar (o hacer operaciones) con diversos tipos de cantidades, debemos recordar algunas cosas que hemos aprendido anteriormente, respecto de las *cantidades constantes* y *variables*. Las primeras son aquellas que poseen un valor fijo (constante, nunca cambia); por ejemplo, todos los numerales 3, $\frac{1}{2}$, $-4.875$, $\sqrt{13}$, $\pi$, etc. Las segundas son aquellas cuyo valor es variable.

Por ejemplo, en un contexto algebraico, recordemos que una *ecuación cuadrática* o de segundo grado (en una variable), es aquella que tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a$, $b$ y $c$ son cantidades constantes, y que, para un caso particular, tendrán un determinado valor, mientras que $x$ es una cantidad variable, cuyo valor es, precisamente, el que buscamos.

**Fuerza de gravedad constante.** A principios del siglo XVII, el científico alemán (nacido en el entonces Sacro Imperio Romano Germánico) Johannes Kepler, expuso sus *tres leyes* sobre el movimiento planetario:

*Primera* (1609). Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol situado en uno de sus focos.

*Segunda* (1609). La recta que une cualquier planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

*Tercera* (1618). El cuadrado del periodo (tiempo en describir una órbita completa alrededor del Sol) es proporcional al cubo de la distancia media del planeta al Sol.

Medio siglo después, *Newton* expuso, en sus *Principios matemáticos de la filosofía natural* (1687), sus *tres leyes de movimiento*:

*Primera*. Todo cuerpo en reposo sigue en reposo a menos que sobre él actúe una fuerza externa. Un cuerpo en movimiento continúa moviéndose con velocidad constante a menos que sobre él actúe una fuerza externa.

(Considerando que la velocidad es un vector, esta ley nos permite afirmar que, un cuerpo moviéndose en trayectoria curvilínea o en línea recta, pero con rapidez variable, deberá estar sujeto a la acción de una fuerza externa)

*Segunda*. La aceleración de un cuerpo tiene la misma dirección que la fuerza externa que actúa sobre él y es proporcional a la fuerza externa neta e inversamente proporcional a la masa del cuerpo.

(Si se considera constante la masa, su valor será precisamente la constante de proporcionalidad entre fuerza y aceleración)

*Tercera*. Las fuerzas siempre actúan por pares iguales y opuestos. Si el cuerpo A ejerce una fuerza sobre el cuerpo B, éste ejerce una fuerza igual, pero opuesta, sobre el cuerpo A.

En el mismo libro Newton atribuyó la aceleración de un planeta en su órbita a una fuerza ejercida sobre él por el Sol, describiendo tal situación en su *Ley de la gravitación universal*, en la cual estableció que existe una fuerza de atracción entre cada par de objetos en el espacio, que es proporcional al producto de las masas de los objetos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Así pues, siendo $m_1$ y $m_2$ las masas de los cuerpos, $r$ la distancia de separación entre (los centros de masa de) los cuerpos y $G$ la constante de proporcionalidad, podemos decir que la fuerza de atracción gravitacional entre los cuerpos está dada por:

$$F = \frac{G\, m_1 m_2}{r^2} \tag{1}$$

El valor de la constante de gravitación universal $G$ es (aproximadamente):

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}} \tag{2}$$

De esta manera, tenemos que, entre dos cuerpos se establece una fuerza de atracción, que actúa en cada uno por la presencia del otro. Si uno de ellos tiene una masa considerablemente menor que la del otro, será el de menor masa el que tienda a moverse hacia el de mayor masa, diciendo entonces que el cuerpo pequeño se encuentra en el campo gravitatorio producido por el cuerpo grande.

Supóngase ahora que un objeto de masa $m$ está sujeto a la fuerza de gravedad de la Tierra, cuya masa es aproximadamente $m_T = 5.9722 \times 10^{24}$ kg. La fuerza de atracción que ejerce la Tierra es el peso del objeto, que, de acuerdo con la segunda ley de Newton, es $F = W = mg$, donde $g$ es la aceleración con la que se movería el objeto al ser sometido a la fuerza de gravedad de la Tierra. De esta manera, de acuerdo con la ecuación (1), tendremos que $mg = \frac{Gm_T m}{r^2}$, de donde, al cancelar el factor común $m$ en ambos lados, obtenemos:

$$g \cong \frac{Gm_T}{r^2} \cong \frac{6.67\times10^{-11}\times5.9722\times10^{24}}{r^2} \cong \frac{3.983\times10^{14}}{r^2}$$

Así pues, la aceleración con la que un objeto se mueve al estar sujeto a la fuerza de gravedad de la Tierra no es estrictamente constante, como normalmente lo consideramos. Incluso no tiene el mismo valor a nivel del mar que en distintas latitudes de la Tierra (recuérdese que la Tierra está achatada en los polos). Veamos, el radio polar y el radio ecuatorial de la Tierra miden, aproximadamente:

$$R_p \cong 6357 \text{ km} \cong 6.357 \times 10^6 \text{ m} \quad \text{y} \quad R_e \cong 6378 \text{ km} \cong 6.378 \times 10^6 \text{ m}$$

Si cada una de estas distancias se sustituyen en la ecuación anterior, obtenemos los valores de la gravedad, en los polos y en el ecuador, dados por:

$$g_p \cong 9.856\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \qquad \text{y} \qquad g_e \cong 9.791\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$$

Sin embargo, con fines prácticos, se ha convenido modelar a la Tierra como una esfera, con un radio medio de $R_p \cong 6371$ km $\cong 6.371 \times 10^6$ m, al que le corresponde un valor de la gravedad de $g_p \cong 9.813\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, que es el utilizado normalmente como valor de referencia para una gravedad "constante".

Así pues, tomando como referencia este valor de la aceleración de la gravedad, obtendríamos que la variación (error) relativa al utilizar ese valor en los polos, sería de $\left|\frac{9.856-9.813}{9.856}\right| \cong 4.36 \times 10^{-3} \cong 0.44\ \%$, mientras que en el ecuador sería de $\left|\frac{9.791-9.813}{9.791}\right| \cong 2.25 \times 10^{-3} \cong 0.23\ \%$.

Tomemos otra vez como referencia el valor aceptado convencionalmente, de $g_p \cong 9.813\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ y supongamos que elevamos un objeto desde el "nivel del mar" correspondiente ($r = 6371$ km), $h$ km hacia arriba, de manera que el objeto estuviera, entonces, a una distancia de $6371 + h$ km. Para obtener un error (variación del valor de la gravedad) del 1%, el valor de $h$ tendría que ser de al menos (poco más de) 32km. Es por esto que, para pequeñas variaciones de la altura (digamos, hasta algunos kilómetros), podemos considerar constante el valor de la aceleración producida por la fuerza de gravedad.

**CANTIDADES GRANDES Y CANTIDADES PEQUEÑAS**

De manera similar a como se supone la aceleración de la gravedad constante, en las ciencias físicas y de la ingeniería es común hacer algunas suposiciones con la finalidad de simplificar el problema, en cuanto a su tratamiento matemático, considerando que la pérdida de precisión que tiene lugar debido a la suposición es lo suficientemente pequeña como para que los resultados obtenidos o las mediciones efectuadas sigan siendo confiables.

Una idea que se utiliza en el estudio de las ciencias es la de suponer el espacio como continuamente ocupada por moléculas, sin vacíos. Ello es necesario para definir alguna función en cualquier punto de una región del espacio (o del plano). Por ejemplo, la densidad (masa entre volumen) de un sistema gaseoso, en un punto, depende de la cantidad de partículas del gas que rodean al punto. Si para cada punto consideramos un espacio suficientemente pequeño, a su alrededor, que contenga un número de partículas suficientemente grande, podremos definir la densidad en el punto como la masa de todas las partículas contenidas en ese pequeño espacio, dividida por el volumen del mismo espacio.

Nótese que se alude a un espacio *suficientemente pequeño*, más no a uno *infinitamente pequeño*. Tampoco se habla de un espacio *tan pequeño como se quiera*, ya que si seguimos "haciendo cada vez más pequeño" el volumen que rodea al punto, podemos "llegar" a un espacio vacío, en donde pierde sentido el concepto de densidad.

Así pues, no se tiene aquí la intención de dar una definición rigurosa de "infinitamente pequeño" (infinitesimal, infinitésimo) o "infinitamente grande" (infinito). Más bien invitamos al lector a asociar estos términos con lo que podríamos llamar "situaciones extremas", queriendo decir con esto que, en el extremo de lo "muy pequeño" está lo *infinitamente pequeño*, y en el de lo "muy grande" estará lo *infinitamente grande*.

De esta manera, cuando se observe que una determinada relación entre algunas cantidades "parece" ocurrir cuando alguna de ellas sea "pequeña", y "parece ocurrir más claramente", si esa cantidad es más pequeña, podremos inferir entonces que esta relación se cumplirá estrictamente cuando la cantidad resulte ser *infinitamente pequeña*.

Los conceptos del Cálculo infinitesimal que se requieren al estudiar en un programa de ingeniería tienen su fundamento en dos ideas básicas que tienen que ver con estas ideas de lo infinitamente pequeño (o infinitamente grande), una de carácter geométrico y otra de carácter operativo, entre aritmético y algebraico. La primera consiste en la visión de un arco curvilíneo como constituido por infinitos segmentos rectilíneos que unen, cada uno de ellos, un par de puntos de la curva, infinitamente próximos entre sí. La segunda de esas ideas, y es la que comenzaremos a abordar a continuación, es la que da lugar a las reglas para operar con cantidades cuando algunas de ellas son infinitamente pequeñas respecto de otras. Ambas ideas estuvieron presentes en las primeras versiones del Cálculo, desarrolladas, de manera independiente, por el científico alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) y el inglés Isaac Newton (1642-1727).

Como iremos viendo, la apropiación de estas ideas básicas nos permite acceder al conocimiento del cálculo infinitesimal y sus aplicaciones en la solución de problemas y en el modelado de fenómenos de interés en las ciencias básicas y de la ingeniería.

Habiendo considerado la situación de definir una propiedad física "en un punto", hablaremos ahora de otro procedimiento muy frecuente, en el estudio de las ciencias, consistente en afirmar que, en un tiempo infinitamente pequeño (o suficientemente pequeño), podemos suponer que la variación de cualquier otra cantidad (que varía con el tiempo) es igualmente infinitesimal (o de tamaño despreciable), y que la rapidez de variación de cualquiera de esas cantidades variables puede considerarse constante.

Por ejemplo, supongamos una partícula moviéndose en línea recta (sobre un eje $x$), de manera que en un tiempo finito $\Delta t$, se habrá desplazado una distancia (también finita) $\Delta x$. La *velocidad media* de la partícula será, en tal caso $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Si en cambio consideramos un tiempo infinitamente pequeño $dt$, la partícula se habrá desplazado una distancia (también infinitamente pequeña) $dx$. La velocidad correspondiente a ese lapso infinitamente pequeño de tiempo (denominado también instante) será entonces $v = \frac{dx}{dt}$, y se le denominará *velocidad instantánea*.

## 2. Operando con cantidades grandes y pequeñas

En el siguiente problema se verá que, en ocasiones, el despreciar una cantidad respecto de otra puede no ser una decisión de quien estudia un problema, sino una consecuencia de las limitaciones de los instrumentos de cálculo.

*La masa de la Tierra, ¿con gente o sin gente?*

Preguntémonos primero cuál es la variación de la masa de la Tierra si cae sobre ella un meteorito de 500 kg de masa y luego calcular la diferencia entre la masa de la Tierra si tomamos en cuenta o no la masa de la gente que habita en ella.

Para empezar, podemos averiguar que la masa de la Tierra es $M_T \cong 5.9722 \times 10^{24}$ kg, de manera que, al aumentar la del meteorito, la masa resultante será:

$$M_{Tm} \cong 5.9722 \times 10^{24} + 500 \text{ kg}$$

Cantidad que, con todas sus cifras es:

$$M_{Tm} \cong 5\,972\,200\,000\,000\,000\,000\,000\,500 \text{ kg}$$

Sin embargo, utilizando una calculadora se obtendrá:

$$M_{Tm} \cong 5.9722 \times 10^{24} + 500 = 5.9722 \times 10^{24} \text{ kg}$$

Esto ocurre debido a que la precisión de la calculadora está generalmente limitada a 10 cifras significativas, las cuales se exhiben en la pantalla de izquierda a derecha, a partir de la primera cifra distinta de cero. De esta manera, comenzará con las cinco cifras 5, 9, 7, 2, 2 y los cinco lugares restantes los ocupará con ceros, así que el “5” (que ocupa el lugar 23) no alcanza a aparecer en la pantalla. Esta situación se puede describir verbalmente indicando que la masa del meteorito resulta “despreciable” con respecto de la de la Tierra.

Ahora vamos a comparar, con la de la Tierra, una masa mucho mayor que los 500 kg del meteorito, por ejemplo, la de la gente que la habita. Para ello y para facilitar los cálculos, supongamos que en la Tierra hay 8 200 millones de personas con una masa promedio de 50 kg. La masa de la Tierra “con todo y gente” será entonces:

$$M_{Tg} \cong 5.9722 \times 10^{24} + 8.2 \times 10^{9} \times 5 \times 10^{1} = 5.9722 \times 10^{24} + 4.1 \times 10^{11} \text{ kg}$$

Haciendo los cálculos con lápiz y papel obtendríamos:

$$M_{Tg} \cong 59\,722\,000\,000\,004\,1 \times 10^{10} \text{ kg}$$

De manera que, para retener el “41” que corresponde en la suma a la masa de todas las personas, deberá utilizarse un instrumento de cálculo con precisión mínima de 14 dígitos, de otra manera no aparecerán esas cifras, por lo que el resultado dado por una calculadora con menor precisión (como aquellas que normalmente utilizamos) será $M_{Tg} \cong 5.9722 \times 10^{24}$ kg. En otras palabras, usando un instrumento de cálculo con una precisión máxima de 13 dígitos, la masa de todas las personas juntas resulta despreciable con respecto de la de la Tierra.

Lo anterior nos permite afirmar que, para cualquier calculadora y cualquier cantidad fija $a$, podemos proponer otra cantidad $N$, suficientemente grande, con respecto de $a$, tal que, efectuando la suma con esa calculadora, se obtenga:

$$a + N = N \qquad \text{(3a)}$$

De igual manera también podemos proponer una cantidad suficientemente pequeña $\alpha$, respecto de $a$ tal que, de acuerdo con la calculadora:

$$a + \alpha = a \qquad \text{(3b)}$$

A una cantidad $N$, para la que se cumpla la igualdad 1a, independientemente de la precisión de la calculadora utilizada, se le llamará *infinitamente grande* (o *infinita*). Análogamente, a una cantidad $\alpha$, para la cual se cumpla la igualdad 1b, independientemente de la precisión de la calculadora utilizada, se le llamará *infinitamente pequeña* (o *infinitesimal*).

**LOS INFINITESIMALES EN LAS CIENCIAS DE LA INGENIERÍA**

En textos de ciencias de la ingeniería puede uno encontrar que, la consideración de que una cantidad sea infinitamente pequeña o infinitamente grande no sea consecuencia de la capacidad de un instrumento de cálculo, sino de la razón entre una magnitud con respecto de otra que sirve como referencia. Por ejemplo, en el texto de *Calor y Termodinámica*, de Zemansky, se indica que se lo siguiente:[1]

> En teoría cinética, el infinitésimo $dV$ debe satisfacer las mismas condiciones que en termodinámica, a saber, que es pequeño comparado con $V$, pero suficientemente grande para que $dN$ sea un número muy grande. Si, por ejemplo, un volumen de 1 $cm^3$ contiene $10^{19}$ moléculas, una millonésima de centímetro cúbico contendrá todavía $10^{13}$ moléculas y se considerará un elemento diferencial de volumen.[2]

Ahora bien, una manera de comparar la magnitud (tamaño) relativa entre dos cantidades dadas, es mediante el cociente (la razón) entre ellas. A ver, supongamos que tenemos dos cantidades $x$ y $y$, y que queremos averiguar qué pasa con el cociente $\frac{y}{x}$ $\left(\text{o bien } \frac{x}{y}\right)$ para distintas situaciones propuestas.

Por ejemplo, supongamos que $y$ es la unidad $(y = 1)$ y que $x$ va tomando el valor de cada potencia enteras (positiva) de 10, en orden creciente, es decir, primero $x = 10^1 = 10$, luego $x = 10^2 = 100$, luego $x = 10^3 = 1\,000$, y así, sucesivamente.

En tal caso los valores de $\frac{y}{x} = \frac{1}{x}$ serán, respectivamente, $\frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0.1$, $\frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0.01$, $\frac{1}{10^3} = \frac{1}{1\,000} = 0.001\ldots$, de manera que, siendo constante el numerador, conforme el denominador crece (se hace cada vez más grande), el cociente decrece (se hace cada vez más pequeño). Así pues, suponiendo $y$ constante, el valor de $\frac{y}{x}$ puede hacerse tan pequeño como se quiera, a condición de hacer $x$ suficientemente grande. Al considerar la situación en el extremo, podemos concluir que, si $\frac{y}{x}$ es infinitamente pequeña, entonces $y$ es infinitamente pequeña respecto de $x$, o bien que $x$ es infinitamente grande respecto de $y$.

Análogamente, si ahora suponemos que $x$ va tomando como valor cada una de las potencias enteras (negativas) de 10, es decir, primero $x = 10^{-1} = 0.1$, luego $x = 10^{-2} = 0.01$, luego $x = 10^{-3} = 0.001$, y así, sucesivamente, entonces los valores correspondientes de $\frac{y}{x} = \frac{1}{x}$ serán, respectivamente, $\frac{1}{10^{-1}} = 10^1 = 10$, $\frac{1}{10^{-2}} = 10^2 = 100$, $\frac{1}{10^{-3}} = 10^3 = 1\,000\ldots$, de manera que, siendo constante el numerador, conforme el denominador decrece (se hace cada vez más pequeño), el cociente crece (se hace cada vez más grande). En el extremo, si

---

[1] Ver Zemansky, M., Dittman, R.; *Calor y Termodinámica*, McGraw-Hill, Madrid, 1984. En los textos de ciencias de la ingeniería los términos *diferencial* e *infinitesimal* se utilizan prácticamente como sinónimos.

[2] En textos de ciencias de la ingeniería es común que se utilicen términos como “elemento diferencial” de una cierta cantidad, como una parte infinitamente pequeña de la misma, o bien, como en este caso, como una parte suficientemente pequeña como para considerar como verdadera alguna proposición.

$\frac{y}{x}$ es infinitamente grande, entonces $y$ es infinitamente grande respecto de $x$, o bien, que $x$ es infinitamente pequeña respecto de $y$.

**Orden, término principal y residuo de una suma de potencias**

Veamos lo que ocurre, entonces, al comparar potencias de una cantidad infinita. Si $N$ es infinitamente grande (respecto de una cantidad finita, la unidad, por ejemplo), tenemos que $\frac{N^2}{N} = N$ que es, por lo tanto, infinitamente grande, así que $N^2$ es infinitamente grande respecto de $N$. Análogamente $\frac{N^3}{N^2} = N$, así que $N^3$ es infinitamente grande respecto de $N^2$, y, en general, que $N^k$ es infinitamente grande respecto de $N^j$, siempre que $k > j$.

Análogamente, si $\alpha$ es infinitamente pequeña (respecto de una cantidad finita), entonces $\alpha^2$ es infinitamente pequeña respecto de $\alpha$, $\alpha^3$ es infinitamente pequeña respecto de $\alpha^2$, y, en general, que $\alpha^k$ es infinitamente pequeña respecto de $\alpha^j$, siempre que $k > j$.

En estos casos decimos que $N^2$, $N^3$, $N^4$, etcétera son cantidades infinitamente grandes, de orden 2, 3, 4, etcétera, o simplemente cantidades infinitamente grandes de orden mayor, y que $\alpha^2$, $\alpha^3$, $\alpha^4$, etcétera son cantidades infinitamente pequeñas (infinitesimales) de orden 2, 3, 4, etcétera, o simplemente infinitesimales de orden mayor.

Las cantidades infinitas resultan despreciables respecto de otras de orden mayor, mientras que los infinitesimales de orden mayor son las que resultan despreciables respecto de los infinitesimales (de menor orden). Esto nos conduce a concluir que:

| | |
|---|---|
| Una suma de potencias de la variable se comporta como su término de mayor grado cuando la variable toma valores (suficientemente) grandes y como su término de menor grado cuando la variable toma valores (suficientemente) pequeños. | (4) |

Si la variable toma valores infinitamente grandes, la suma de potencias será, exactamente, el término de mayor orden, que se llamará *término principal* y el resto de los términos serán *el residuo*. Si en cambio, la variable toma valores infinitamente pequeños, el término de menor orden será el *término principal* y el resto de ellos será el residuo.

Se puede constatar lo anterior en el ejemplo siguiente, tomado de un texto de Mecánica de materiales en el que se aborda el cambio de volumen de un sólido, debido a una deformación:

**Cambio en el volumen por deformación**[3]

Cuando se estudia el problema de la deformación de un sólido, sometido a fuerzas de tensión o estiramiento, se analiza el caso de la deformación de una barra con sección rectangular $(b \times c)$ y longitud $a$, antes de sufrir la deformación.

Se considera que una pequeño alargamiento, producido por una fuerza de tensión, en la dirección del eje de la barra, provoca una alargamiento en esa dirección y una contracción en la sección transversal, de manera que las medidas de la barra, después de la deformación, son $a + a\varepsilon$, $b - b\nu\varepsilon$ y $c - c\nu\varepsilon$,

[3] Gere, J. M., Timoshenko, S. P., *Mecánica de materiales*, 4ª ed., Thomson, México, 1998 (1997), pp. 25-26.

donde, suponiendo "pequeñas deformaciones", se tendrá que $\varepsilon$ es "muy pequeña" en comparación con la unidad, lo que se denotará $\varepsilon \ll 1$.

Lo que se desea es obtener una expresión para el cambio en el volumen de la barra, por efecto de la deformación, en términos de $\varepsilon$, bajo la consideración de que $\varepsilon \ll 1$. Así pues, tenemos que, el volumen de la barra, antes de la deformación, es:

$$V_0 = abc$$

Y después de la deformación:

$$V_f = (a + a\varepsilon)(b - bv\varepsilon)(c - cv\varepsilon) = abc(1+\varepsilon)(1-v\varepsilon)(1-v\varepsilon)$$

$$V_f = abc[1 + (1-2v)\varepsilon + (v^2 - 2v)\varepsilon^2 + v^2\varepsilon^3]$$

Al considerar que $\varepsilon$ es muy pequeña en comparación con la unidad, su cuadrado y su cubo son despreciables en comparación con la $\varepsilon$ misma y pueden cancelarse en la expresión, quedando entonces $V_f = abc[1 + (1-2v)\varepsilon]$. El cambio en el volumen será, entonces:

$$\Delta V = V_f - V_0 = abc[1 + (1-2v)\varepsilon] - abc = abc\,(1-2v)\varepsilon = V_0(1-2v)\varepsilon$$

Por otra parte, si se sabe que $x$ y $w$ son infinitesimales, se puede suponer que $x = c_1\alpha$ y $w = c_2\alpha$, de manera que $xw = (c_1\alpha)(c_2\alpha) = c_1c_2\alpha^2$, por lo que $xw$ será un infinitesimal de orden 2, respecto de $x$ o de $w$. Esto nos permite decir que, el producto de dos infinitesimales es un infinitesimal de orden mayor que cada uno de ellos, es decir:

| | |
|---|---|
| Si $x$ y $w$ son cantidades infinitesimales, y si $c_1$, $c_2$ y $c_3$ son cantidades finitas (números reales), entonces: $$c_1x + c_2w + c_3xw = c_1x + c_2w$$ | (5) |

Al final de esta sección se incluye un ejemplo, tomado de un texto de Estática, donde se aplica esta proposición.

## 3. Curvas, poligonales y tangentes

**La circunferencia y los polígonos inscritos**. Comenzaremos a explorar la idea de la relación entre curvas y poligonales. Primeramente, con la ayuda de geogebra, consideremos la afirmación de que "la circunferencia es un polígono regular con un número infinito de lados".

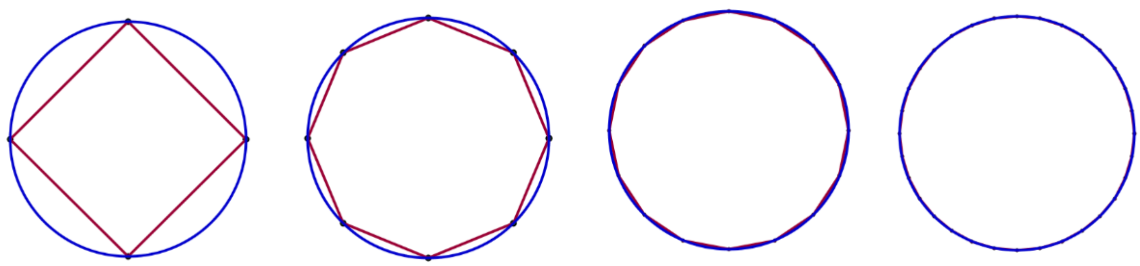

Figura 1

Para ello dibujemos polígonos regulares inscritos en una circunferencia, con un número creciente de lados. Conforme este número crezca, los vértices estarán más próximos entre sí y los lados del polígono serán más pequeños, por lo que se confundirán cada vez más con segmentos rectilíneos. Los polígonos mostrados en la figura 1.1 tienen 4, 8,16 y 32 lados, y puede observarse que, con tan solo 32 lados ya no se percibe una diferencia entre el polígono y la circunferencia.

La situación antes descrita resulta válida no sólo para el caso de una circunferencia u otra curva cerrada, sino para cualquier curva en general. Es decir, si se elige un conjunto de puntos de una curva, y luego se dibuja la poligonal obtenida al unir con un segmento rectilíneo cada par de puntos consecutivos, la poligonal resultante se confundirá con la curva siempre que el número de vértices (o de lados) de la poligonal, sea suficientemente grande, y que dos vértices consecutivos cualesquiera, estén suficientemente próximos entre sí.

Por ejemplo, en la figura 2 se muestra la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$, para $x \in [0,2\pi]$, así como las poligonales correspondientes a 4, 8, 16 y 32 lados, uniendo puntos con abscisas equiespaciadas en el intervalo. Puede observarse que para apenas 32 lados la poligonal ya no se distingue de la curva.

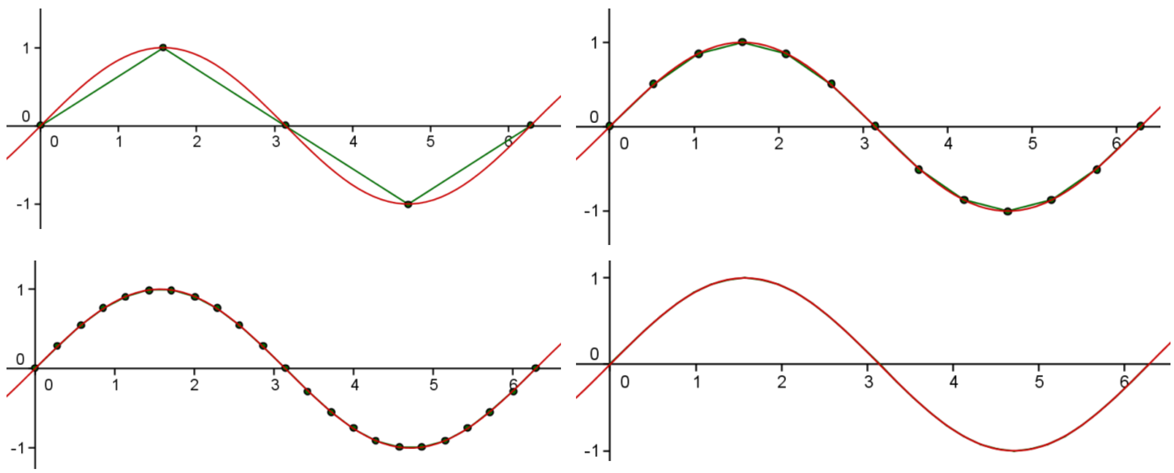


Figura 2

Así pues, si el número de vértices es "grande", la poligonal se confundirá con la curva y cada uno de los arcos correspondientes a dos vértices consecutivos se confundirá con el segmento rectilíneo correspondiente. Podemos decir entonces que:

| | |
|---|---|
| Si el número de vértices de una poligonal inscrita en una curva es infinitamente grande, y cada uno de sus lados tiene una longitud infinitesimal, entonces la poligonal y la curva son la misma cosa, y cada uno de sus lados coincide con el arco correspondiente. | (6) |

**Arcos, cuerdas y tangentes.** Hemos visto que el arco de una curva se confunde con el segmento rectilíneo que los une cuando los extremos del arco son puntos suficientemente próximos entre sí. Eso condujo a Leibniz a considerar una curva como una poligonal constituida por una infinidad de segmentos infinitamente pequeños.

Los matemáticos de fines del siglo XVII, tanto los partidarios de Leibniz como los de Newton fueron más allá en la observación de una porción infinitamente pequeña de una curva. Consideraron que el arco de una curva, definido por dos puntos suficientemente próximos entre sí, no sólo se confunde con la cuerda sino también con la porción correspondiente de la recta tangente. Es decir, tomados dos puntos de una curva, infinitamente próximos entre sí, el arco comprendido entre ellos coincide con el arco y con el correspondiente segmento de la recta tangente.

Este es un resultado denominado *principio de las razones últimas*, enunciado por Newton más o menos en estos términos: “si un punto Q se mueve sobre una curva, aproximándose a un punto fijo P, también de la curva, la recta tangente a la curva en el punto P, así como el arco y el segmento que unen a P y a Q, terminarán por confundirse en un solo segmento (de longitud infinitesimal)”.

En la figura 3 se ilustra tal proposición, siendo la curva la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$. En cada una de las cuatro gráficas se muestra una ventana limitada, por la izquierda, por el punto fijo P, de abscisa 1 (así que $P = (1, \operatorname{sen} 1)$), y por la derecha, por el punto Q, que está cada vez más cerca de P, $\Delta x$ unidades a su derecha, de manera que $\mathrm{Q} = \big(1 + \Delta x, \operatorname{sen}\,(1 + \Delta x)\big)$.

En cada caso se muestra, el arco de la curva $y = \operatorname{sen} x$ (en verde), y la cuerda PQ (en azul) y la parte correspondiente de la tangente (en rojo).

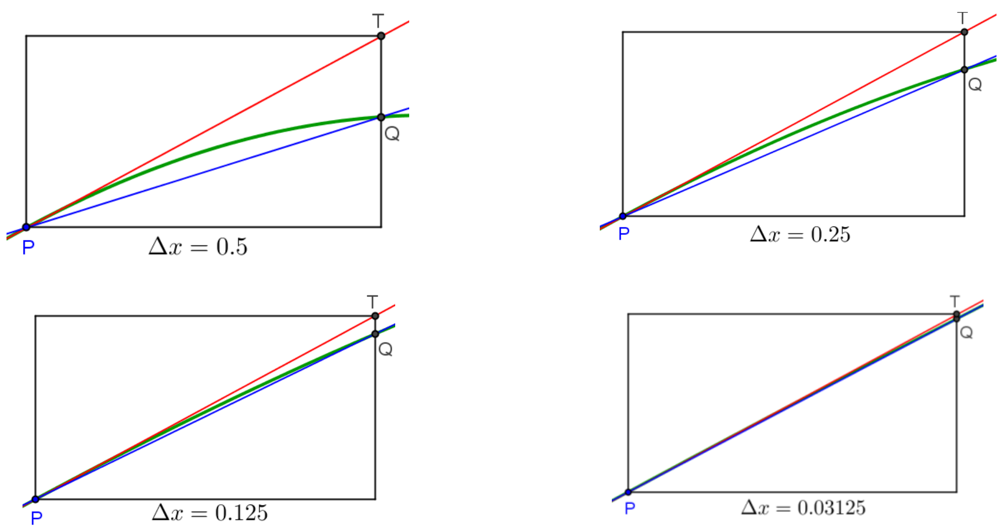


Figura 3

Las figuras mostradas corresponden a $\Delta x = 0.5$, $\Delta x = 0.25$, $\Delta x = 0.125$ y $\Delta x = 0.03125$, de manera que podemos ver el punto Q “moviéndose” hacia P si se ven las gráficas de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo. Podemos observar que, tal como indicaba Newton, conforme Q se aproxima a P, queda aún más próximo de T, de manera que la cuerda y el arco PQ se van confundiendo con la tangente PT. Esto nos permite afirmar que:

| | |
|---|---|
| Si Q es un punto infinitamente próximo a P, siendo ambos puntos de una misma curva, entonces la cuerda PQ, el arco PQ, y la porción de la recta tangente a la curva en el punto P, situada por encima (o por debajo) del segmento PQ, son la misma cosa, así que, en estas condiciones de infinita proximidad, una de ellas puede ser sustituida por cualquiera de las otras. | (7) |

Vamos a usar este resultado para determinar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado. Para ello, consideremos la curva *C* definida por medio de la regla de correspondencia $y = f(x)$, y un punto $\mathrm{P} = (a, f(a))$ de la misma (figura 4). Se desea ubicar la recta $T_P$, tangente a la curva *C*, en el punto P.

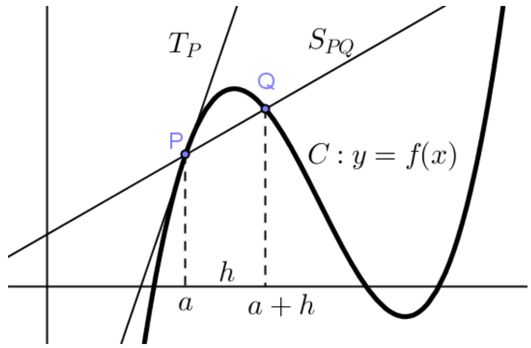


Figura 4

Pensemos ahora en un segundo punto de la curva, digamos el punto Q, situado $h$ unidades a la derecha (aunque también podría ser a la izquierda, en cuyo caso $h$ sería negativa) del punto P, de manera que $\mathrm{Q} = (a + h, f(a + h))$. La pendiente de la recta (secante a la curva) que pasa por P y Q, será entonces $m_{PQ} = \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Si ahora suponemos que $h$ es infinitesimal (cuando la secante también es tangente), tendremos que Q estará infinitamente cerca de P y el arco PQ será rectilíneo y formará parte de la secante o la tangente. De esta manera, la pendiente de la recta tangente será:

| | |
|---|---|
| $m_T = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, $h$ infinitesimal | (8) |

Así pues, para obtener la pendiente de la recta tangente, y por lo tanto determinar tal recta, será suficiente con calcular el término principal de la expresión del lado derecho de (8).

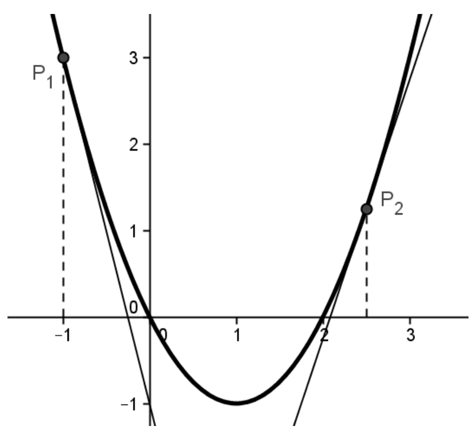


Figura 5

Por ejemplo, si *C* es la parábola definida mediante $f(x) = x^2 - 2x$ (figura 5), tendremos entonces que $f(a) = a^2 - 2a$ y $f(a+h) = (a+h)^2 - 2(a+h) = a^2 + 2ah + h^2 - 2a - 2h$, así que $f(a+h) - f(a) = (a^2 + 2ah + h^2 - 2a - 2h) - (a^2 - 2a) = 2ah + h^2 - 2h = (2a-2)h + h^2$.

Por lo tanto $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a - 2 + h$ y, como $h$ es infinitesimal, el término principal de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ será $2a - 2$, para cualquier valor de $a$. Por ejemplo, si $a = -1$ (punto $P_1$ en la figura), la pendiente de la recta tangente será $m_1 = 2(-1) - 2 = -4$, mientras que, si $a = 2.5$ (punto $P_2$ en la figura), la pendiente de la recta tangente será $m_2 = 2(2.5) - 2 = 3$. Con esta información podemos trazar las rectas tangentes en ambos puntos, tal como se muestra en la figura.

Lo anterior nos hace ver la importancia de poder calcular el término principal de una expresión dada. Por el momento podemos hacer eso con algunas expresiones algebraicas. En la segunda unidad veremos cómo hacerlo para otros tipos de funciones.

Ahora bien, en caso de no poder calcular el término principal, si queremos sólo una aproximación del valor de la pendiente lo podemos hacer a partir de la regla de correspondencia de la función.

En efecto, la ecuación (8) nos dice cómo calcular en forma exacta el valor de la pendiente de la recta tangente, y lo podremos hacer siempre que sepamos obtener el término principal de la expresión del lado derecho de esa ecuación. Sin embargo, si en esa expresión $h$ no es una cantidad infinitamente pequeña, sino sólo una "muy pequeña", entonces el valor de la expresión será una aproximación de la pendiente:

| | |
|---|---|
| $m_T \cong \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, *h* "pequeño" | (9) |

Por ejemplo, si *C* es la curva definida mediante $f(x) = \ln(x+1)$ (figura 6), y $a = 1$, y si proponemos 0.001 como valor "pequeño" de $h$, entonces:

$$f(a) = f(1) = \ln 2 \cong 0.693147,$$

$$f(a+h) = f(1+0.001) = f(1.001) = \ln 2.001 \cong 0.693647,$$

y $$f(a+h) - f(a) = f(1.001) - f(1) \cong 0.693647 - 0.693147 \cong 0.0005$$

Así que $m_T \cong \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cong \frac{0.0005}{0.001} \cong 0.5$.

Así pues, la pendiente de la recta tangente a la curva *C*, en $x = 1$, es aproximadamente $m_T \cong 0.5$, por lo que la ecuación de tal recta es, aproximadamente:

$$y - \ln 2 = 0.5\,(x-1),$$

$$y - 0.693147 = 0.5\,x - 0.5,$$

$$y = 0.5x + 0.193$$

En este caso (como se puede verificar) se obtuvo el valor exacto de la pendiente. Esto no ocurrirá en general, sin embargo, se podrá obtener una aproximación suficientemente buena, a condición de asignar un valor suficientemente pequeño al incremento de la variable.

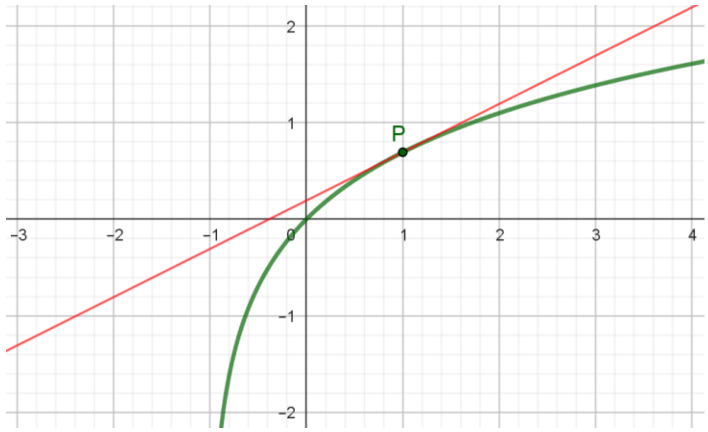


Figura 6

**El seno y el coseno de un ángulo infinitamente pequeño.** La ecuación (7) es la proposición básica en el estudio de las curvas y su uso facilita la obtención de muchos de los resultados del cálculo infinitesimal. Vamos a ver, por ejemplo, a qué nos conduce dicha proposición cuando se aplica al caso particular de la circunferencia.

Considérese pues el sector circular OAB (figura 7), correspondiente a un ángulo central $w$ de una circunferencia de radio $a = \mathrm{OA}$. Si $w$ está medido en radianes, el arco AB y la cuerda *AB* estarán dadas por $\text{arco AB} = aw$ y $\overline{\mathrm{AB}} = 2a \text{ sen} \left(\frac{w}{2}\right)$.

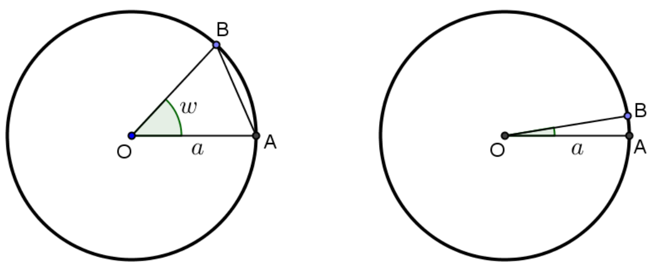


Figura 7

Cuando $w$ es pequeño, el arco y la cuerda se parecen, pero si $w$ es infinitesimal, estos son iguales, de manera que $aw = 2a \text{ sen } \left(\frac{w}{2}\right)$, $w = 2 \text{ sen } \left(\frac{w}{2}\right)$ y $\frac{w}{2} = \text{sen } \left(\frac{w}{2}\right)$.

Es decir, si $\alpha$ es infinitesimal, entonces $\text{sen } \alpha = \alpha$. Por otra parte, suponiendo válidas las identidades trigonométricas para ángulos infinitesimales, tenemos que $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, de donde $\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha$, y $\cos\alpha = \sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha} = \sqrt{1 - \alpha^2} = 1$. En resumen:

| | |
|---|---|
| Si $\alpha$ es infinitesimal, entonces:<br>$\text{sen } \alpha = \alpha$ y $\cos\alpha = 1$ | (10) |

Para finalizar esta sección veamos el procedimiento seguido, en un texto de Estática (Ordoñez, Betancourt y Reyes p. 342), en el que se aborda el problema de la fuerza de fricción en una banda.

Como podemos observar, en este proceso se aplican, sucesivamente, las proposiciones (9) y (5).

En la Figura se indica un diagrama de cuerpo libre de un elemento de banda que tiene una longitud $ds = r\,d\theta$. Suponiendo, ya sea que el deslizamiento de la banda sobre el tambor es inminente, o bien que ya se ha establecido dicho deslizamiento, la magnitud de la fuerza de fricción $dF = \mu\,dN$. Esta fuerza se opone al deslizamiento de la banda, y por tanto, hace que el incremento de la magnitud de la tensión en la banda sea $dT$.

$$\text{Con} \quad \sum F_x = 0: \; T\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + \mu\,dN - (T + dT)\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0 \qquad (1)$$

$$\text{Con} \quad \sum F_y = 0: \; dN - (T + dT)\,\text{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) - T\,\text{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0 \qquad (2)$$

Como $d\theta$ es de tamaño diferencial, podemos sustituir $\text{sen}\left(\frac{d\theta}{2}\right)$ por $\frac{d\theta}{2}$ y $\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right)$ por 1, respectivamente. Asimismo, el producto de los infinitesimales $dT$ y $\frac{d\theta}{2}$ pueden despreciarse con relación a los infinitesimales de primer orden. De esta manera las ecuaciones (1) y (2) se reducen a:

$$\mu\,dN = dT \qquad\qquad dN = T\,d\theta$$